



MODUL

PENGEMBANGAN KEPROFESIAN BERKELANJUTAN

MATEMATIKA TEKNIK

SEKOLAH MENENGAH KEJURUAN (SMK)

Kelompok Kompetensi

EDISI REVISI 2018

Terintegrasi Penguatan Pendidikan Karakter dan Pengembangan Soal
Keterampilan Berpikir Aras Tinggi (HOTS)

PEDAGOGI

**Teknik Komunikasi Efektif
dalam Pembelajaran**

PROFESIONAL

Matematika Diskrit



Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan
Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan
2018

MODUL PENGEMBANGAN KEPROFESIAN BERKELANJUTAN

MATEMATIKA TEKNIK

SEKOLAH MENENGAH KEJURUAN (SMK)

TERINTEGRASI PENGUATAN PENDIDIKAN KARAKTER DAN PENGEMBANGAN SOAL
KETERAMPILAN BERPIKIR ARAS TINGGI (HOTS)

EDISI REVISI 2018

KELOMPOK KOMPETENSI G

PEDAGOGI:

Teknik Komunikasi Efektif dalam Pembelajaran

Penulis:

Dr. Edison Ginting, M.M.

Drs. D.R. Willy Umboh, M.M.

Penelaah:

Harry Dwi Putra, S.Pd., M.Pd.

Prof. Dr. Nanang Priatna, M.Pd.

PROFESIONAL:

Matematika Diskrit

Penulis:

Wahyu Purnama, S.Si, M.Pd. (inisial.wp@gmail.com)

Maya Siti Rohmah, S.Si, M.Pd.

Penelaah:

Harry Dwi Putra, S.Pd., M.Pd.

Prof. Dr. Nanang Priatna, M.Pd.

Desain Grafis dan Ilustrasi:

Tim Desain Grafis

Copyright © 2018

Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan
Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

Dilarang mengcopy sebagian atau keseluruhan isi buku ini untuk kepentingan komersial tanpa izin tertulis dari
Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan



KATA SAMBUTAN

Peran guru profesional dalam proses pembelajaran sangat penting sebagai kunci keberhasilan belajar siswa. Guru profesional adalah guru yang kompeten membangun proses pembelajaran yang baik sehingga dapat menghasilkan pendidikan yang berkualitas dan berkarakter prima. Hal tersebut menjadikan guru sebagai komponen yang menjadi fokus perhatian pemerintah pusat maupun pemerintah daerah dalam peningkatan mutu pendidikan terutama menyangkut kompetensi guru.

Pengembangan profesionalitas guru melalui Program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan merupakan upaya Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan melalui Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan dalam upaya peningkatan kompetensi guru. Sejalan dengan hal tersebut, pemetaan kompetensi guru telah dilakukan melalui Uji Kompetensi Guru (UKG) untuk kompetensi pedagogi dan profesional pada akhir tahun 2015. Peta profil hasil UKG menunjukkan kekuatan dan kelemahan kompetensi guru dalam penguasaan pengetahuan pedagogi dan profesional. Peta kompetensi guru tersebut dikelompokkan menjadi 10 (sepuluh) kelompok kompetensi. Tindak lanjut pelaksanaan UKG diwujudkan dalam bentuk pelatihan guru paska UKG sejak tahun 2016 dan akan dilanjutkan pada tahun 2018 ini dengan Program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan bagi Guru. Tujuannya adalah untuk meningkatkan kompetensi guru sebagai agen perubahan dan sumber belajar utama bagi peserta didik. Program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan bagi Guru dilaksanakan melalui Moda Tatap Muka.

Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan (PPPPTK) dan, Lembaga Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan Kelautan Perikanan Teknologi Informasi dan Komunikasi (LP3TK KPTK) merupakan Unit Pelaksana Teknis di lingkungan Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan yang bertanggung jawab dalam mengembangkan perangkat dan melaksanakan peningkatan kompetensi guru sesuai bidangnya. Adapun perangkat pembelajaran yang dikembangkan tersebut adalah modul Program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan melalui Pendidikan dan Pelatihan Guru moda tatap muka untuk semua mata pelajaran dan kelompok kompetensi. Dengan modul ini diharapkan program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan memberikan sumbangan yang sangat besar dalam peningkatan kualitas kompetensi guru.

Mari kita sukseskan Program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan melalui Pendidikan dan Pelatihan Guru ini untuk mewujudkan Guru Mulia karena Karya.

Jakarta, Juli 2018



Direktur Jenderal Guru
Tenaga Kependidikan,

Dr. Supriano, M.Ed.

NIP. 196208161991031001



KATA PENGANTAR

Undang-Undang Republik Indonesia Nomor 14 Tahun 2005 tentang Guru dan Dosen mengamanatkan adanya pembinaan dan pengembangan profesi guru secara berkelanjutan sebagai aktualisasi dari profesi pendidik. Program Peningkatan Keprofesian Berkelanjutan dilaksanakan bagi semua guru, baik yang sudah bersertifikasi maupun belum bersertifikasi. Untuk melaksanakan Program Peningkatan Keprofesian Berkelanjutan bagi guru, pemetaan kompetensi telah dilakukan melalui Uji Kompetensi Guru (UKG) bagi semua guru di Indonesia. Dengan melihat hasil UKG dapat diketahui secara objektif kondisi guru saat ini, dan data tersebut dapat digunakan untuk meningkatkan kompetensi guru tersebut.

Modul ini disusun sebagai materi utama dalam program peningkatan kompetensi guru mulai tahun 2017 yang diberi nama Peningkatan Keprofesian Berkelanjutan (PKB). Program ini disesuaikan dengan mata pelajaran/paket keahlian yang diampu oleh guru dan kelompok kompetensi yang diindikasikan perlu untuk ditingkatkan. Untuk setiap mata pelajaran/paket keahlian telah dikembangkan sepuluh modul kelompok kompetensi yang mengacu pada Standar Kompetensi Guru (SKG) dan indikator pencapaian kompetensi (IPK) yang ada di dalamnya. Demikian pula soal-soal Uji Kompetensi Guru (UKG) telah terbagi atas 10 kelompok kompetensi. Sehingga program Peningkatan Keprofesian Berkelanjutan yang ditujukan bagi guru berdasarkan hasil UKG diharapkan dapat menjawab kebutuhan guru dalam peningkatan kompetensinya.

Sasaran program strategis pencapaian target RPJMN tahun 2015–2019 antara lain adalah meningkatnya kompetensi guru dilihat dari *Subject Knowledge* dan *Pedagogical Knowledge* yang diharapkan akan berdampak pada kualitas hasil belajar siswa. Oleh karena itu, materi di dalam modul dirancang meliputi kompetensi pedagogi yang disatukan dengan kompetensi profesional yang didalamnya terintegrasi penguatan pendidikan karakter dan pengembangan soal keterampilan berpikir aras tinggi (HOTS) sehingga diharapkan dapat mendorong peserta diklat agar dapat langsung menerapkan kompetensi pedagoginya dalam proses pembelajaran sesuai dengan substansi materi yang diampunya. Disamping dalam bentuk *hard-copy*, modul ini dapat diperoleh juga dalam bentuk digital, sehingga guru dapat lebih mudah mengaksesnya kapan saja dan dimana saja meskipun tidak mengikuti diklat secara tatap muka.

Kepada semua pihak yang telah bekerja keras dalam penyusunan modul program Guru Pembelajar ini, kami sampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya.

Cimahi, Juli 2018

Kepala PPPPTK BMTI,

Drs. Marthen Katte Patiung, M.M.
NIP. 19590416 198603 1 000

Modul

Pengembangan Keprofesian
Berkelanjutan



Kelompok Kompetensi

PEDAGOGI

TEKNIK KOMUNIKASI EFEKTIF DALAM PEMBELAJARAN

Edisi Revisi 2018



Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan
Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan
2018

MODUL PENGEMBANGAN KEPROFESIAN BERKELANJUTAN

MATEMATIKA TEKNIK

SEKOLAH MENENGAH KEJURUAN (SMK)

**TERINTEGRASI PENGUATAN PENDIDIKAN KARAKTER DAN
PENGEMBANGAN SOAL KETERAMPILAN BERPIKIR ARAS TINGGI (HOTS)**

EDISI REVISI 2018

KELOMPOK KOMPETENSI G

PEDAGOGI:

Teknik Komunikasi Efektif dalam Pembelajaran

Penulis:

Dr. Edison Ginting, M.M.

Drs. D.R. Willy Umboh, M.M.

Penalaah:

Harry Dwi Putra, S.Pd., M.Pd.

Prof. Dr. Nanang Priatna, M.Pd.

Desain Grafis dan Ilustrasi:

Tim Desain Grafis

Copyright © 2018

Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan
Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

Dilarang mengcopy sebagian atau keseluruhan isi buku ini untuk kepentingan komersial
tanpa izin tertulis dari Kementerian Pendidikan Kebudayaan



DAFTAR ISI

KATA SAMBUTAN	i
KATA PENGANTAR.....	ii
DAFTAR ISI.....	iii
DAFTAR TABEL	vi
LAMPIRAN.....	vi
PENDAHULUAN	Error! Bookmark not defined.
Latar Belakang	1
Tujuan.....	2
Peta Kompetensi	2
Ruang Lingkup	3
Saran Cara Penggunaan Modul	4
KEGIATAN PEMBELAJARAN 1	5
Tujuan.....	5
Indikator Pencapaian Kompetensi	5
Uraian Materi.....	6
Bahan Bacaan 1: Pengantar Komunikasi.....	6
Bahan Bacaan 2: Proses Terjadinya Komunikasi.....	8
Bahan Bacaan 3: Teknik Mengatasi Hambatan Komunikasi.....	11
Bahan Bacaan 4 : Komunikasi Efektif	13
Bahan Bacaan 5 : Komunikasi Interpersonal.....	22
Bahan Bacaan 6 : Macam-macam Metode mengajar untuk Membangun Komunikasi efektif dengan peserta didik.....	40
Aktivitas Pembelajaran	47
Aktivitas 1 Diskusi Kelompok: Pengantar Idenfitikasi Isi Materi Pembelajaran.....	47
Aktivitas 2 Diskusi dan Penggalan Informasi: Pengantar Komunikasi	47
Aktivitas 3: Teknik Komunikasi Efektif di Kelas	48
Aktivitas 4: Komunikasi Effektif	48
Aktivitas 5: Komunikasi Interpersonal	48
Rangkuman.....	57



Tes Formatif.....	58
Kunci Jawaban.....	59
PENUTUP	60
DAFTAR PUSTAKA.....	61
GLOSARIUM.....	62



DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1 Peta Kompetensi Pedagogi.....	2
Gambar 1.2 Peta Kompetensi Profesional	3



DAFTAR TABEL

LAMPIRAN



PENDAHULUAN

Latar Belakang

Pengembangan keprofesian berkelanjutan sebagai salah satu strategi pembinaan guru dan tenaga kependidikan diharapkan dapat menjamin guru dan tenaga kependidikan mampu secara terus menerus memelihara, meningkatkan, dan mengembangkan kompetensi sesuai dengan standar yang telah ditetapkan. Pelaksanaan kegiatan PKB akan mengurangi kesenjangan antara kompetensi yang dimiliki guru dan tenaga kependidikan dengan tuntutan profesional yang dipersyaratkan.

Guru dan tenaga kependidikan wajib melaksanakan PKB baik secara mandiri maupun kelompok. Khusus untuk PKB dalam bentuk diklat dilakukan oleh lembaga pelatihan sesuai dengan jenis kegiatan dan kebutuhan guru. Penyelenggaraan diklat PKB dilaksanakan oleh PPPPTK dan LPPPTK KPTK atau penyedia layanan diklat lainnya. Pelaksanaan diklat tersebut memerlukan modul sebagai salah satu sumber belajar bagi peserta diklat. Modul merupakan bahan ajar yang dirancang untuk dapat dipelajari secara mandiri oleh peserta diklat berisi materi, metode, batasan-batasan, dan cara mengevaluasi yang disajikan secara sistematis dan menarik untuk mencapai tingkatan kompetensi yang diharapkan sesuai dengan tingkat kompleksitasnya.

Untuk mempersiapkan kegiatan PKB dalam bentuk diklat bagi guru-guru matematika diperlukan adanya modul yang tepat sesuai dengan tuntutan dari Permendiknas no. 16 Tahun 2007 tentang Standar Kualifikasi Akademik dan Kompetensi Guru. Dari permendiknas tersebut, standar kompetensi guru yang dikembangkan dari kompetensi pedagogi memuat sepuluh kompetensi inti guru yang diantaranya memuat tentang penguasaan konsep komunikasi efektif dalam pembelajaran dan dari kompetensi profesional memuat tentang konsep matematika diskrit.



Tujuan

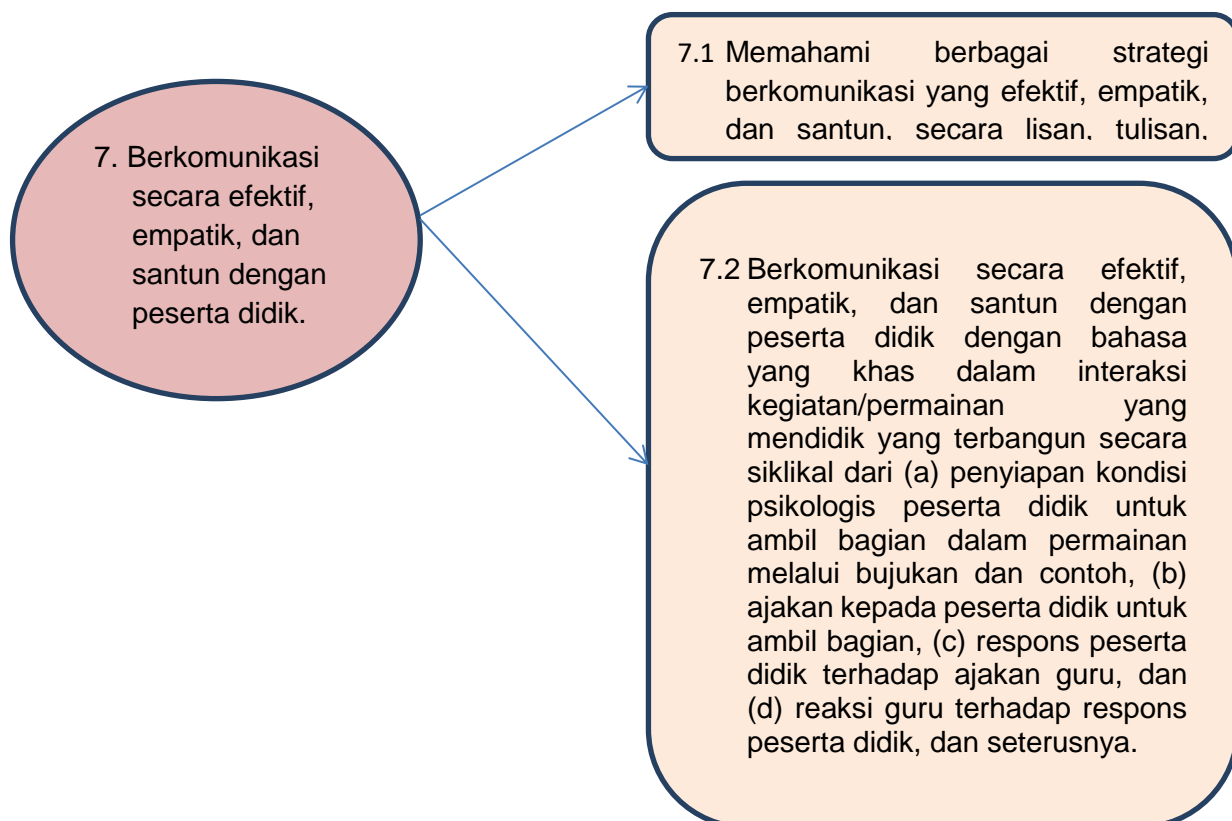
Tujuan penyusunan modul ini adalah agar peserta diklat PKB dapat menguasai konsep komunikasi efektif dalam pembelajaran dan konsep matematika diskrit melalui kegiatan diskusi dengan percaya diri.

Peta Kompetensi

Pada Gambar 1 dan Gambar 2 berikut dicantumkan daftar kompetensi pedagogi dan daftar kompetensi profesional sesuai dengan Permendiknas Nomor 16 Tahun 2007 tentang Standar Kualifikasi Akademik dan Kompetensi Guru yang akan ditingkatkan melalui proses belajar dengan menggunakan modul ini.

Gambar 1.1

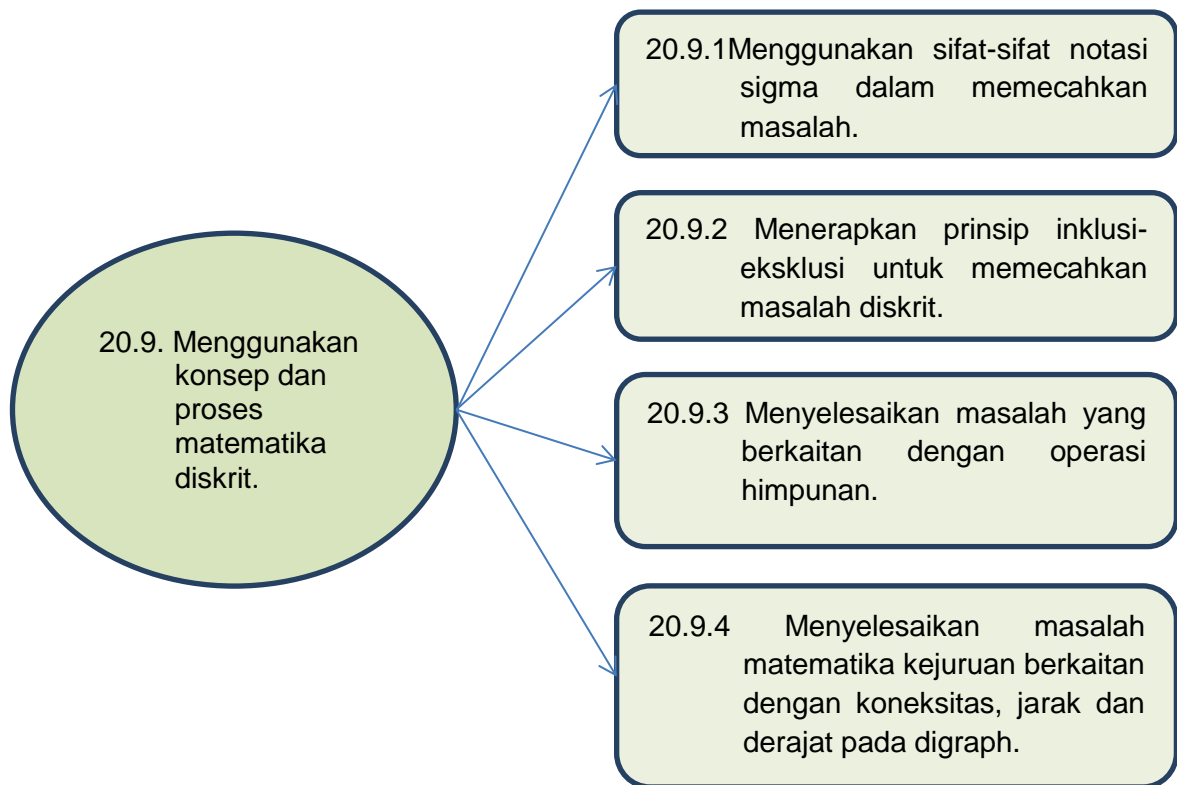
Peta Kompetensi Pedagogi





Gambar 1.2

Peta Kompetensi Profesional



Ruang Lingkup

Ruang lingkup dari modul ini berisikan kegiatan belajar untuk pengembangan kompetensi pedagogi dan kompetensi profesional. Secara rinci ruang lingkup dari modul ini adalah sebagai berikut.

1. Komunikasi Efektif dalam Pembelajaran

Berisi uraian materi tentang komunikasi secara efektif, empatik, dan santun dengan peserta didik dalam kegiatan pembelajaran.

2. Notasi Sigma

Berisi uraian materi tentang bentuk deret dalam notasi sigma, jumlah atau nilai dari notasi sigma, dan sifat-sifat notasi sigma beserta penggunaannya.

3. Himpunan



Berisi uraian materi tentang pengertian himpunan, keanggotaan, penyajian himpunan, kardinalitas, kesamaan dan himpunan bagian, himpunan kuasa, himpunan saling bebas, operasi pada himpunan, beserta sifat-sifatnya, pembuktian kalimat himpunan, prinsip dualitas, prinsip inklusi-eksklusi, dan notasi yang berkaitan dengan teori himpunan.

4. Teori *Graph*

Berisi uraian materi tentang definisi *graph*, terminologi, jenis-jenis *graph*, keterhubungan *graph*, matriks ketetanggaan dan bersisian, *graph* sebagai model matematika beserta aplikasinya.

Saran Cara Penggunaan Modul

Untuk mempelajari modul ini, hal-hal yang perlu peserta diklat lakukan adalah sebagai berikut:

1. Baca dan pelajari semua materi yang disajikan dalam modul ini,
2. Kerjakan soal-soal tes formatif dan cocokkan jawabannya dengan Kunci Jawaban yang ada.
3. Jika ada bagian yang belum dipahami, diskusikanlah dengan rekan belajar Anda. Jika masih menemui kesulitan, mintalah petunjuk instruktur/widyaiswara.
4. Untuk mengukur tingkat penguasaan materi Kerjakan soal-soal Uji Kompetensi di akhir bab dalam modul ini



KEGIATAN PEMBELAJARAN 1

Kegiatan Pembelajaran 1 :

Teknik Komunikasi Efektif Dalam Pembelajaran

Tujuan

Setelah mempelajari materi ajar dan melakukan latihan serta diskusi, peserta mampu:

1. Mendeskripsikan prinsip dan teknik komunikasi efektif dalam suasana pembelajaran yang menyenangkan dengan baik dan benar;
2. mempraktikkan teknik komunikasi efektif dalam pembelajaran di kelas secara santun dan empatik;
3. Membangun komunikasi dengan siswa dalam konteks materi ajar secara efektif .

Indikator Pencapaian Kompetensi

1. Komunikasi yang efektif, empatik, dan santun dilakukan untuk penyiapan kondisi psikologis peserta didik, agar ambil bagian dalam permainan melalui bujukan dan contoh sesuai dengan mata pelajaran yang diampu.
2. Komunikasi yang efektif, empatik, dan santun dilakukan untuk mengajak peserta didik, agar ambil bagian dalam kegiatan pembelajaran sesuai dengan mata pelajaran yang diampu.
3. Komunikasi yang efektif ,empatik, dan santun dilakukan agar peserta didik merespon ajakan guru dalam kegiatan pembelajaran sesuai dengan mata pelajaran yang diampu.
4. Komunikasi oleh guru yang efektif ,empatik, dan santun dilakukan untuk merespon peserta didik secara lengkap dan relevan sesuai dengan pertanyaan dan perilaku siswa.



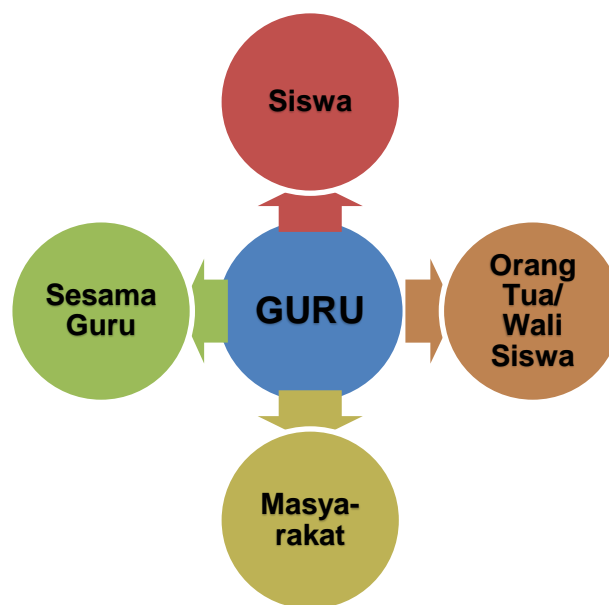
Uraian Materi

Bahan Bacaan 1: Pengantar Komunikasi

Salah satu tuntutan kemampuan guru yang tersirat dalam standar kompetensi guru yaitu berkaitan dengan kemampuan guru untuk mengkomunikasikan materi yang akan diajarkan kepada siswa. Sesuai Permendiknas Nomor 16 Tahun 2007 tentang Standar Kualifikasi Akademik dan Kompetensi Guru disebutkan dalam salah satu kompetensi yaitu kompetensi sosial, disyaratkan adanya kemampuan guru untuk berkomunikasi dan berinteraksi secara efektif dan efisien dengan siswa, sesama guru, kepala sekolah, orang tua/wali siswa dan masyarakat sekitar.

Gambar 1.3

Interaksi guru



Oleh karena itu, penguasaan kemampuan berkomunikasi merupakan hal yang tidak dapat dielakkan oleh guru.

Mengapa komunikasi begitu penting?

Kualitas sebuah pembelajaran sangat dipengaruhi efektif tidaknya suatu komunikasi yang berlangsung di dalamnya. Komunikasi dapat dikatakan efektif dalam



pembelajaran merupakan proses transformasi pesan berupa ilmu pengetahuan dan teknologi dari pendidik kepada peserta didik, dimana peserta didik mampu memahami maksud pesan sesuai dengan tujuan yang telah ditentukan, sehingga akan berdampak pada bertambahnya wawasan/pengetahuan/keterampilan pada peserta melalui interaksi melalui komunikasi yang produktif antara guru dengan peserta didik, sehingga menghasilkan perubahan perilaku dalam diri siswa secara positif. Gurumemiliki peranan paling penting terhadap kelangsungan komunikasi secara efektif dalam suatu pembelajaran, sehingga sebagai pendidik, guru dituntut memiliki kemampuan berkomunikasi yang baik agar menghasilkan proses pembelajaran yang efektif.

Kegiatan pembelajaran merupakan proses transformasi pesan edukatif berupa materi belajar dari sumber belajar kepada pembelajar. Dalam pembelajaran terjadi proses komunikasi untuk menyampaikan pesan dari pendidik kepada peserta didik dengan tujuan agar pesan dapat diterima dengan baik dan berpengaruh terhadap pemahaman serta perubahan tingkah laku. Dengan demikian keberhasilan kegiatan pembelajaran sangat tergantung kepada efektifitas proses komunikasi yang terjadi dalam pembelajaran tersebut. Berikut beberapa pendapat tentang definisi atau pengertian komunikasi, sebagai berikut:

- **Theodore Herbert:**

Komunikasi merupakan proses yang di dalamnya menunjukkan arti pengetahuan dipindahkan dari seseorang kepada orang lain, biasanya dengan maksud mencapai beberapa tujuan khusus.

- **Evertt M. Rogers:**

Komunikasi sebagai proses yang di dalamnya terdapat suatu gagasan yang dikirimkan dari sumber kepada penerima dengan tujuan untuk merubah perilakunya.

- **Wilbur Schramm:**

Komunikasi merupakan tindakan melaksanakan kontak antara pengirim dan penerima, dengan bantuan pesan; pengirim dan penerima memiliki beberapa pengalaman bersama yang memberi arti pada pesan dan simbol yang dikirim oleh pengirim, dan diterima serta ditafsirkan oleh penerima. (Suranto:2005)



- **Concise Oxford Dictionary**

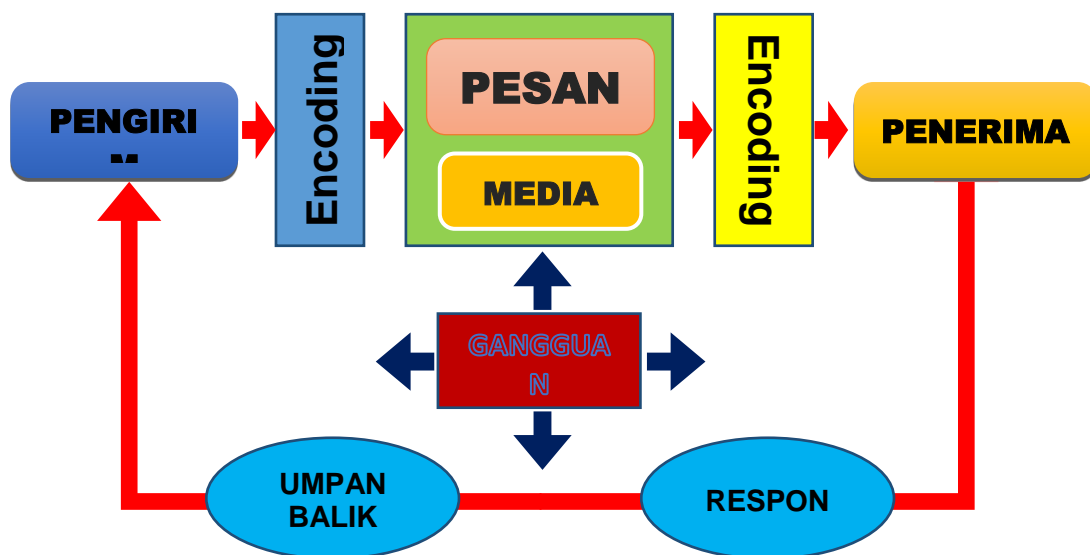
Tindakan menyampaikan, terutama berita, atau ilmu dan praktek transmisi informasi. Definisi ini jelas menunjukkan hubungan antara pengajaran dan guru komunikasi terus-menerus menanamkan pengetahuan baru, atau transmisi informasi.

Bahan Bacaan 2: Proses Terjadinya Komunikasi

Komunikasi yang efektif terjadi, apabila ada transmisi pengertian antara pengirim dan penerima informasi. Transmisi pengertian termaksud terjadi, apabila digunakan simbol-simbol yang sama-sama dimengerti, baik dalam bentuk verbal maupun non verbal.

Gambar 1.4

Model Komunikasi

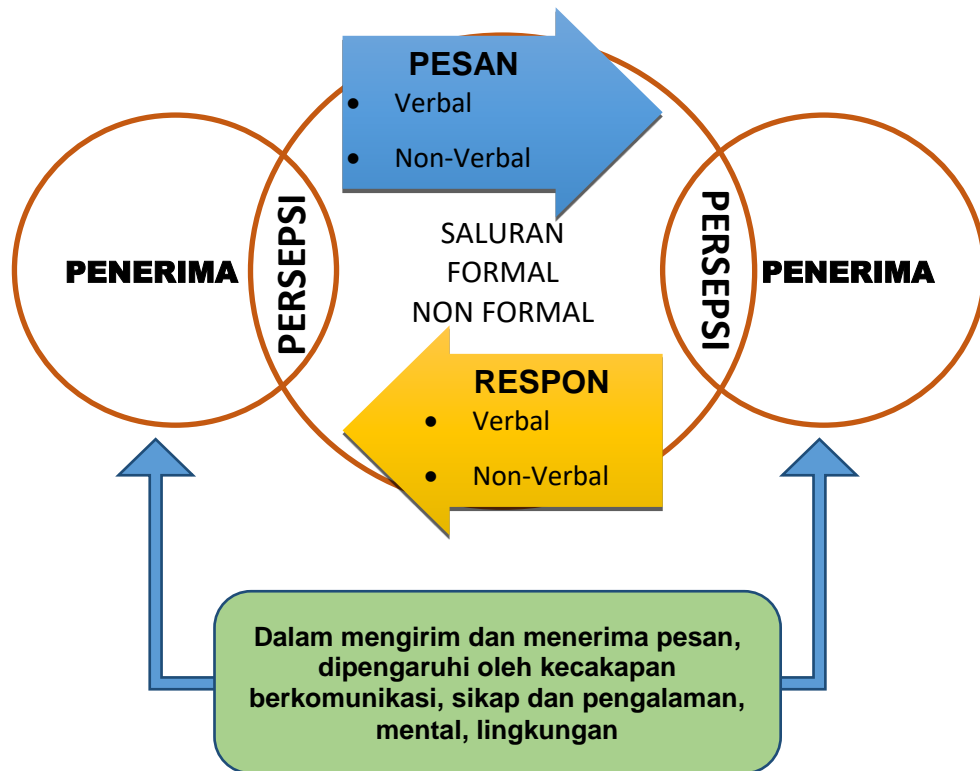


Bila dicermati, berdasarkan diagram model komunikasi tersebut, terdapat beberapa unsur penting, sebagai berikut:



Gambar 1.5

Model Komunikasi Efektif



1. **Pengirim (Sender)** → Pengirim/sumber pesan merupakan pihak atau orang yang mempunyai ide, keinginan, kehendak, pemikiran, informasi, tujuan, dan sebagainya untuk mengkomunikasikannya kepada pihak lain.

Sender mencoba untuk memilih tipe pesan dan saluran yang akan digunakan yang dinilai paling efektif. Sebelum terjadinya penyaluran informasi sender *mensandikan (encoding)* pesannya baik verbal maupun non verbal (pesan non verbal dimaksudkan bahwa seseorang tidak berkomunikasi secara lisan ataupun tulisan, melainkan dengan *gesture*). Terdapat beberapa prinsip yang perlu dipertimbangkan untuk meningkatkan proses *encoding*, yakni: relevansi, kesederhanaan, pengorganisasian, pengulangan, focus.



2. **Penerima Pesan (Receiver)** → yaitu orang yang menerima dan menginterpretasi pesan atau informasi dari pengirim pesan.
3. **Message (Pesan)** → merupakan ide-ide, fakta-fakta, atau problem yang dimaksud oleh sender untuk dikomunikasikan kepada receiver. Pesan merupakan harapan pihak yang memberi pesan (source) kepada penerima pesan (receiver) melalui proses encoding.

Suatu pesan yang dikirim dengan pesan yang diterima tidak selalu sama. Proses encoding dan decoding bervariasi antara satu orang dengan orang lain. Hal itu dipengaruhi oleh faktor kecakapan dalam berkomunikasi, sikap, dan pengalamannya, maupun kematangan mental kedua belah pihak, serta perbedaan latar belakang dan pandangannya.

4. **Channel (Saluran)** → merupakan sarana atau media pembawa pesan. Dalam hal ini berupa telepon, pertemuan kelompok, memo, system penghargaan, pernyataan kebijaksanaan, jadwal dan sebagainya, yang dapat melakukan transmisi (penyampaian) ide anda.
5. **Feedback (Balikan)** → komunikasi yang efektif akan mengikuti jalur dua arah, maka balikan dari receiver kepada sender adalah penting, sebagai bentuk respon atas pesan yang disampaikan oleh sender kepada receiver. Pentingnya balikan, adalah karena asumsi bahwa tidak semua yang dikatakan atau ditulis pasti dapat dipahami oleh receiver. merupakan informasi yang kembali pada pemberi pesan, yang memberikan pertanda tentang penerimaan pesan yang telah diberikan.
6. **Perspsi (Perception)** → persepsi terdapat pada kedua belah pihak (pengirim dan penerima pesan) Jadi persepsi pada diri setiap orang pada dasarnya dipengaruhi oleh obyek yang dilihat, cara mengorganisasikan obyek tersebut ke dalam memori, dan arti yang dapat ditangkap dari obyek tersebut.



Permainan:

Pilihlah salah satu situasi berikut yang paling anda senangi atau sering anda lakukan pengalaman anda dalam berkomunikasi

1. belanja suatu barang,
2. pesan makanan melalui telepon *delivery service*,
3. memberikan perintah kepada siswa
4. menghadiri suatu rapat.

kemudian isilah unsur-unsur berikut sesuai situasi yang anda pilih (waktu 5 menit): Pengirim :

- Pesan :
- Penerima :
- Media :
- Umpan Balik :
- Gangguan :

Bahan Bacaan 3: Teknik Mengatasi Hambatan Komunikasi

Agar dalam berinteraksi dengan orang lain melalui komunikasi efektif, maka perlu adanya penajaman pada aspek kecakapan (menyampaikan dan menerima informasi), menyadari factor penyebab kegagalan komunikasi (Abi Sujak, 1990:105-106).

1. Tingkatkan kejelasan pesan

Perkembangan teknologi computer dan informatika yang sedemikian pesat, mempermudah setiap orang untuk menyajikan pesan secara jelas.

2. Pengaturan arus informasi

Informasi yang diterima secara bersamaan/simultan perlu dikelola berdasarkan tingkat kepentingannya dan urgensinya.

3. Mendorong timbulnya balikan (feedback)

Memastikan bahwa pesan yang telah disampaikan mendapatkan respon sesuai dengan yang dimaksud sangat penting guna memastikan tugas yang



didelegasikan atau ditugaskan kepada bawahan atau anggota kelompok sesuai dengan sasaran dan tujuan yang ingin dicapai/disepakati bersama.

4. Menggunakan bahasa yang sederhana

Banyak pimpinan/atasan atau individu tertentu yang menggunakan jargon-jargon dalam proses organisasi yang sukar dipahami.

5. Mendengarkan secara efektif

Pendengar yang baik akan menghargai setiap gagasan atau informasi yang dikemukakan oleh lawan bicara. Pendengar yang baik lebih menekankan pada aspek apa yang dibicarakan bukan siapa yang berbicara atau melihat tata bahasa, serta memperhatikan secara seksama dan memberikan respon secara positif. Memang aktivitas mendengarkan akan lebih membosankan dibanding dengan berbicara.

6. Memahami emosi

Faktor emosi menjadi penyebab terjadinya distorsi pada isi pesan. Suatu pesan akan dapat diterima dengan antusias oleh penerima bila disampaikan dengan rasa akrab, tanpa praduga negatif.

7. Mengembangkan rasa percaya diri

Menanamkan kepercayaan akan mewarnai kejujuran dan keterbukaan dalam penyampaian informasi oleh sender kepada receiver.

Bahasa Tubuh sebagai Bagian Komunikasi

Bahasa tubuh terdiri dari perkataan-perkataan kalimat-kalimat, frase-frase dan tanda baca. Tiap gerak isyarat sama seperti sepatah kata dan mungkin memiliki beberapa makna. Ada pendapat yang menyatakan: **“mengusir tamu tidak harus dengan kata-kata tetapi cukup dengan tingkah laku”**. Sekarang hampir semua orang menyadari bahwa mungkin bisa membaca sikap seseorang melalui perilakunya. Inilah hal penting yang perlu dipahami oleh pelaku bisnis dalam memahami dan mempraktekan bahasa tubuh.

Penelitian tentang bahasa tubuh menunjukkan bahwa dalam presentasi-presentasi tatap muka, kuatnya pengaruh pesan anda terhadap para pendengar adalah sebagai berikut (Hinkley:2004:101, terjemahan)

Perkataan : 7,0% - 10% dari total pengaruh

Vokal : 21 % - 30% dari total pengaruh



Bahasa tubuh : 60 % - 80 % dari total pengaruh

Hasil penelitian tersebut menunjukkan bahwa cara Anda memandang, gerak isyarat, tersenyum, berpakaian dan gerak memiliki pengaruh besar terhadap sikap orang lain kepada Anda. Cara anda berbicara lebih penting tiga kali lipat daripada perkataan yang Anda gunakan. Berdasarkan Hinkley (2004) terhadap tiga kaidah membaca tanda:

1. Membaca Kluster

Gerak isyarat dapat menjadi kalimat yang disebut dengan kluster. Oleh karenanya, jangan menginterpretasi satu gerak isyarat secara terpisah.

2. Mempertimbangkan Konteks

Kluster gerak isyarat harus dievaluasi dimana terjadinya.

3. Memahami perbedaan Kultural

Gerak isyarat yang berarti satu hal di satu tempat dan budaya atau Negara berbeda.

Bahan Bacaan 4 : Komunikasi Efektif

a. Materi Pembelajaran

1) Komunikasi Efektif

Untuk Apapun, Anda Harus Berbicara. Apapun jenis pekerjaan yang Anda lakukan, Anda selalu akan melakukan tiga hal berikut ini:

- Memimpin;
- Menjual;
- Mempresentasikan.

Dalam pelaksanaannya atau faktanya, Anda bahkan mungkin melakukan ketiganya sekaligus.

Jika Anda sedang memimpin, maka Anda pasti sedang “menjual” sesuatu agar diikuti oleh orang-orang yang Anda pimpin. Dan dalam melakukannya, Anda akan menyajikan atau mempresentasikan berbagai hal yang relevan agar orang yang Anda pimpin mau mengikuti keinginan Anda.

Jika Anda sedang “menjual” sesuatu, artinya Anda sedang mengupayakan posisi memimpin, agar orang lain mau mengambil keputusan sesuai dengan yang Anda



inginkan sebagai pihak yang menjual. Dan sekali lagi, Anda pasti mempresentasikan berbagai hal yang relevan. Jika Anda sedang berpresentasi, maka Anda bisa dipastikan sedang menjual sesuatu. Dan karena Anda sedang berusaha menjual sesuatu, maka Anda pasti berupaya untuk memimpin *audience*, agar mendengarkan Anda, agar menyimak presentasi Anda, agar memahami maksud dan tujuan Anda, dan agar teryakinkan sesuai tujuan presentasi Anda. Dalam melakukan semua aktivitas di atas, media paling umum yang akan Anda gunakan adalah komunikasi verbal alias berbicara. Muara dari semua aktivitas itu, atau hasil akhir dari semua aktivitas itu, akan sangat ditentukan oleh kualitas bicara Anda. Sebelum sampai ke persoalan teknis seperti struktur bicara, intonasi, gaya bahasa atau bahkan pilihan kata dan kalimat, aspek mendasar dari kualitas bicara Anda adalah tingkat percaya diri Anda saat melakukannya.

Singkatnya, Anda harus menaburkan aura percaya diri saat berbicara. Karena dari situlah segala hasil akhir akan ditentukan. Jadi, titik awal Anda untuk semua aktivitas itu, adalah meraih rasa percaya diri yang lebih baik. Berkomunikasi dan rasa percaya diri memiliki hubungan yang sangat erat. Percaya diri datang dari kemampuan berkomunikasi secara verbal, dengan berbicara yang efektif, atau sebaliknya.

Dengan berbicara, Anda akan berbicara pada diri sendiri dan berbicara pada orang lain. Berbicara kepada diri sendiri akan menjalankan proses manajemen diri. Adalah orang yang paling tahu harus mengatakan apa pada diri sendiri. Begitu juga dengan berbicara kepada orang lain akan menjalankan proses manajemen diri orang lain. Jadi, mulailah segala keberhasilan Anda dengan percaya diri saat berkomunikasi.

Kemampuan berkomunikasi merupakan keterampilan yang sangat penting dalam hidup kita. Kita menghabiskan sebagian besar waktu yang ada disaat kita sadar dan bangun untuk berkomunikasi. Sama halnya dengan bernafas, komunikasi bisa dianggap sebagai hal yang otomatis terjadi begitu saja. Sehingga kita tidak memiliki kesadaran untuk melakukannya dengan efektif. Kita pada umumnya tidak pernah mempelajari bagaimana menulis dengan efektif, bagaimana membaca dengan cepat, bagaimana berbicara dengan efektif, apalagi bagaimana menjadi pendengar yang baik.



Komunikasi berasal dari perkataan “*Communicare*” yaitu yang di dalam bahasa latin mempunyai arti “berpartisipasi atau memberitahukan”, sedangkan perkataan “*Comunis*” berarti milik bersama ataupun “berlaku dimana-mana” atau juga berarti sama, sama di sini maksudnya sama makna. Jadi jika dua orang melakukan komunikasi misalnya dalam bentuk percakapan maka komunikasi akan berjalan atau berlangsung dengan baik selama ada kesamaan makna mengenai apa yang dipercakapkan.

Collen Mc. Kenna mendefinisikan komunikasi sebagai proses pengiriman pesan kepada penerima dengan saling pengertian. Proses ini melibatkan beberapa komponen, yaitu pengirim pesan (*sender*), pesan yang dikirimkan (*message*), bagaimana pesan tersebut dikirimkan (*delivery channel* atau *media*), penerima pesan (*receiver*), dan unpan balik (*feedback*) yang diharapkan.

Kemampuan mengembangkan komunikasi yang efektif merupakan salah satu keterampilan yang amat diperlukan untuk pengembangan diri kita baik sebagai personal maupun professional seperti guru, kepala sekolah, pengawas dll, atau sebagai pemimpin maupun sebagai anggota sebuah tim. Paling tidak kita harus menguasai empat jenis keterampilan dasar dalam komunikasi, yaitu menulis, membaca (bahasa tulisan), mendengar, dan berbicara (bahasa lisan). Perhatikan, hampir setiap saat kita menghabiskan waktu untuk mengerjakan setidaknya salah satu dari keempat hal itu. Oleh karena itu, kemampuan untuk menguasai keterampilan dasar komunikasi dengan baik mutlak kita perlukan demi efektifitas dan keberhasilan kita.

Menurut Covey, unsur terpenting pada komunikasi bukan sekedar pada apa yang kita tulis atau kita katakan, tetapi lebih pada karakter kita dan bagaimana kita menyampaikan pesan itu. Jika pesan yang kita sampaikan di bangun dari hubungan manusia yang dangkal, bukan dari diri kita yang paling dalam, orang lain akan melihat dan membaca sikap kita. Jadi syarat utama dalam komunikasi efektif adalah karakter yang kokoh yang dibangun dari fondasi integritas pribadi yang kuat.

Dalam hubungan komunikasi yang efektif, kepercayaan merupakan dasar terciptanya teamwork. Kepercayaan ini hanya bisa muncul kalau kita mempunyai integritas, yang mencakup hal hal yang lebih dari sekedar kejujuran. Kalau



kejujuran mengatakan kebenaran atau menyesuaikan kata kata kita dengan realitas, integritas menyesuaikan realitas dengan kata kata kita. Integritas bersifat aktif, sedangkan kejujuran bersifat pasif.

Ada lima hukum komunikasi efektif, yang oleh Aribowo Prijosaksono dalam bukunya *Make Yourself A Leader* dirangkum dalam satu kata yang mencerminkan esensi dari komunikasi, yaitu REACH, yang berarti merengkuh atau meraih. Pada dasarnya komunikasi adalah upaya kita untuk meraih perhatian, cinta kasih, minat, kepedulian, simpati, tanggapan, maupun respon positif dari orang lain.

Kelima hukum komunikasi efektif tersebut adalah :

- a) *Respect*
- b) *Empathy*
- c) *Audible*
- d) *Clarity*
- e) *Humble*

Jika Anda/kita membangun komunikasi berdasarkan pada lima hukum pokok komunikasi yang efektif ini, Anda dapat menjadi seorang komunikator yang handal yang dapat membangun jaringan hubungan dengan orang lain dengan penuh penghargaan (*respect*), karena hal inilah yang dapat membangun hubungan jangka panjang yang saling menguntungkan dan saling menguatkan. Yang pada akhirnya dapat Anda jadikan sebagai sarana efektif untuk meraih kesuksesan.

2) Mendengarkan Orang Lain (*Listening*)

Menjadi pendengar yang baik merupakan salah satu syarat mutlak bagi seorang pengawas untuk bisa memiliki pengaruh terhadap kepala sekolah, guru, dan staf sekolah lainnya. Dengan memiliki pengaruh, seorang pengawas memiliki bekal yang lebih baik untuk memberdayakan para perangkat sekolah tersebut sehingga tujuan yang diharapkan dapat tercapai.

Apa yang ada pada tubuh kita sebenarnya sudah menggambarkan bagaimana seharusnya kita menggunakannya secara bijak agar bisa memberikan manfaat bagi diri sendiri maupun orang lain. Sebagai contoh, kita memiliki satu mulut dan dua telinga, artinya kita dituntut untuk lebih banyak mendengar daripada berbicara.



Sayangnya, kita tidak terbiasa untuk terampil menggunakan telinga kita untuk mendengar lebih banyak daripada berbicara. Padahal, dengan banyak mendengar, akan makin banyak pula informasi yang kita dapatkan. Dengan banyak informasi, kita pun akan memiliki bekal yang lebih baik lagi guna mempengaruhi orang lain.

Seberapa jauhkah keterampilan mendengar anda selama ini? Coba anda pahami hal-hal di bawah ini.

a) Mengapa Kita Harus Mendengar

Mendengar tidak hanya merupakan perilaku yang sopan dan memberikan nilai yang berharga bagi si pendengar. Kita juga bisa mendapatkan banyak hal dari mendengar. Banyak alasan mengapa kita harus mau mendengar yaitu :

- **Membangun kepercayaan.**

Orang-orang yang mau mendengarkan ternyata lebih dipercaya daripada orang-orang yang banyak bicara dan mengobrol. Kepercayaan merupakan pelumas bagi terjadinya perubahan pemikiran, dan mendengarkan adalah kuncinya.

- **Kredibilitas.**

Jika kita mau sungguh-sungguh mendengar terhadap orang lain, maka kredibilitas kita pada mereka akan meningkat. Mereka akan mempersepsikan kita sebagai orang yang memiliki kapabilitas dan akan bisa bekerja bersama mereka, bukan menyerang mereka. Para pemimpin, pelatih, fasilitator yang hebat adalah orang-orang yang mampu menjadi pendengar yang baik, dan sebaliknya, para pendengar yang baik pun memiliki potensi untuk bisa menjadi pemimpin yang besar.

- **Dukungan**

Pada umumnya orang mengakui bahwa mereka merasa memperoleh dukungan bila didengar, khususnya saat mereka merasa marah atau gelisah. Dengan didengar, mereka merasa dihargai dan dipahami. Jadi, jika kita mau mendengar seseorang, sama artinya dengan kita mengirimkan pesan yang menyatakan “Anda penting bagi saya. Saya menghargai anda”.



- **Menjadikan sesuatu terlaksana**

Sebagaimana membangun kepercayaan, mendengar juga memungkinkan kita mencapai tujuan, karena orang yang didengar akan mau bekerja sama dengan kita

- **Informasi**

Mendengar memberikan kita banyak informasi yang berguna, baik untuk saat ini maupun masa yang akan datang. Dengan memiliki banyak informasi, maka kita akan dapat mengarahkan apa yang dikatakan orang.

- **Pertukaran**

Jika kita mendengarkan orang lain, maka mereka akan lebih mendengarkan kita. Sesuai dengan prinsip pertukaran, dukungan kita kepada orang lain akan membuat mereka juga mendukung kita sehingga akhirnya kita akan bisa mencapai tujuan.

b) Kebiasaan Mendengar Yang Buruk

Mendengar secara buruk sudah menjadi hal yang umum, namun jarang diperhatikan. Menurut Robertson (1994), ada sepuluh kebiasaan mendengar yang buruk yang paling umum dilakukan orang. Kesepuluh kebiasaan tersebut adalah:

- Kurang perhatian pada masalah yang dibicarakan
- Perhatian dipusatkan pada orangnya, bukan pada isi pembicaraan.
- Melakukan interupsi.
- Memusatkan perhatian pada detail dan mengabaikan gambaran umum.
- Memaksakan mencocokkan ide pembicara kedalam model mental sendiri.
- Menunjukkan bahasa tubuh yang menandakan ketidaktertarikan
- Menciptakan atau membiarkan terjadinya kebingungan
- Mengabaikan apa yang tidak dipahami
- Membiarkan emosi menghalangi pemahaman materi yang dibicarakan
- Mengkhayal, sehingga tidak bisa mendengar pembicaraan secara utuh.



c) Kebiasaan Mendengar Yang Baik

Meskipun kebiasaan mendengar yang baik sudah merupakan hal umum, namun ada beberapa pola kebiasaan mendengar yang bisa dilakukan untuk membantu orang lain, termasuk pada akhirnya membantu diri sendiri.

Kebiasaan mendengar yang baik tersebut adalah:

- **Memberikan perhatian penuh**

Berikan perhatian terhadap orang yang sedang berbicara. Berikan mereka perhatian penuh, tidak hanya dengan telinga, tapi dengan seluruh badan; menghadaplah pada orang yang sedang berbicara dan tataplah. Lakukan hal ini dengan sepenuh hati, bukan hanya secara fisik. Jika hati kita benar-benar terarah untuk memperhatikan, secara otomatis tubuh pun akan mengikuti.

- **Membantu orang lain untuk bicara**

Kadang-kadang orang yang berbicara mengalami kesulitan mengemukakan apa yang ingin ia bicarakan. Mungkin mereka bukan pembicara yang baik, atau memang sedang mencari cara untuk menjelaskan sesuatu yang kompleks. Kita bisa membantu mereka dan diri kita sendiri dengan dorongan yang positif (positive encouragement). Jika mereka kurang yakin, doronglah mereka dengan anggukan, senyuman, dan suara yang positif (misalnya ya...ya, hmm). Perhatikan bahwa kita tertarik pada mereka dan jangan pikirkan bahwa mereka tidak cukup terpelajar/pandai. Jika mereka susah payah dalam mengemukakan suatu konsep, cobalah bantu mereka mengemukakan apa yang mereka maksudkan dengan menggunakan kalimat lain. Mengajukan pertanyaan yang positif merupakan suatu pendekatan yang bagus, baik untuk menguji pemahaman kita sendiri maupun menunjukkan ketertarikan kita kepada mereka.

- **Memberi orang lain dukungan (support)**

Mendengar yang baik juga mencakup tindakan yang menunjukkan bahwa kita penuh perhatian kepada orang lain. Sebagai bagian dari mendengar, kita seharusnya berusaha untuk membantu orang lain merasa nyaman dengan diri mereka sendiri. Sikap mendasar untuk memberikan



dukungan adalah menghargai dan menerima semua orang, bahkan saat kita tidak setuju dengan apa yang mereka katakan atau cara mereka mengatakan sesuatu. Jika kita tidak setuju, maka ketidaksetujuan kita adalah terhadap argumennya, bukan terhadap orangnya. Perhatikan penerimaan kita atas hak mereka untuk berbeda dengan kita.

- **Mengelola reaksi kita**

Hati-hatilah dengan reaksi kita terhadap apa yang orang lain katakan. Mudah saja bagi seseorang yang menjadi pendengar untuk menunjukkan ketidaktertarikannya, menunjukkan bahwa mereka tidak mau mendengarkan kita, atau menunjukkan bahwa mereka lebih tertarik untuk mengkritik kita. Sebelum kita berkomentar dan memberikan respons tentang apa yang orang lain katakan, berhentilah sejenak untuk merenungkan kesimpulan dan prasangka yang ada dalam diri kita. Pikirkan tentang apa yang akan kita katakan dan efek yang mungkin ditimbulkannya. Pertimbangkan apakah hal tersebut yang memang ingin kita capai.

d) Gaya Mendengar

Menurut Barker (1971) dan Watson (1995), ada empat gaya mendengarkan yang biasanya digunakan orang, tergantung pada kesukaan dan tujuannya. Keempat gaya mendengar tersebut adalah sebagai berikut:

- **Gaya Orientasi Orang (People-Oriented)**

Orang-orang yang *people oriented* menunjukkan perhatian yang kuat pada orang lain dan perasaannya. Mereka tergolong external focus, mendapatkan energinya dari orang lain dan mendapatkan banyak makna dalam hubungan/relasi, lebih banyak berbicara tentang “kita” daripada “anda” atau “mereka”.

Orang-orang tipe ini berusaha memahami sejarah kehidupan orang lain dan menggunakan teknik “penceritaan diri mereka sendiri” sebagai makna pemahaman. Mereka memusatkan perhatian pada emosi, berempati, dan melibatkan emosi dalam argumen-argumennya. Mereka bisa menampilkan diri sebagai orang yang mudah dikritik dan akan menggunakannya untuk menunjukkan bahwa mereka tidak berbahaya.



Orang dengan tipe ini bisa mendapat masalah bila mereka terlibat terlalu mendalam dengan orang lain. Hal ini bisa mengganggu kepekaan mereka dalam membuat keputusan maupun kemampuan untuk membedakan. Mereka bisa berhubungan sangat erat dengan orang lain yang mengakibatkan mereka tidak dapat melihat secara objektif keterbatasan dan kesalahannya, dan bisa jatuh kedalam hubungan yang tidak bijaksana. Mereka juga akan tampak sebagai orang yang turut campur saat berusaha menjalin hubungan dengan orang lain yang tidak begitu berorientasi pada hubungan.

- **Gaya Orientasi Isi (Content-Oriented)**

Orang dengan gaya orientasi isi lebih tertarik dengan apa yang dikatakan daripada siapa yang berkata atau apa yang mereka rasakan. Mereka menilai orang lain berdasarkan pada seberapa kredibel mereka dan akan berusaha menguji keahlian dan keadaan yang sebenarnya dari orang tersebut.

Orang tipe ini memusatkan perhatian pada fakta dan bukti dan senang menyelidiki detail. Mereka berhati-hati dalam melakukan asesmen, berusaha mencari tahu hubungan sebab akibat, dan mencari bukti sebelum menerima apa pun sebagai hal yang benar. Orang-orang ini bisa menghadapi masalah bila mereka menolak ide-ide dan harapan-harapan orang lain serta menolak informasi karena belum memiliki cukup bukti yang mendukung.

- **Gaya Orientasi Tindakan (Action-Oriented)**

Pendengar yang berorientasi tindakan memusatkan perhatian pada apa yang akan dilakukan, tindakan apa yang akan terjadi, kapan, dan siapa yang akan melakukannya. Mereka mencari jawaban atas pertanyaan “lalu apa?” dan mencari tahu rencana tindakan. Mereka menyukai penjelasan yang gamblang, ringan, dan jawaban yang didasarkan pada bukti nyata/konkret.

Orang dengan tipe ini bisa tidak sabar dan meminta pembicara agar segera menyampaikan kesimpulan. Mereka juga bisa mengkritik orang yang berbicara tentang gambaran besar sesuatu atau berbicara tentang



ide-ide dan konsep-konsep. Hal ini bisa menyebabkan mereka untuk terlalu memusatkan perhatian pada pengendalian dan kurang memperhatikan kesejahteraan/ kenyamanan orang lain.

- **Gaya Orientasi Waktu (Time-Oriented)**

Orang dengan gaya ini “mempunyai mata yang terus terpaku pada jam”. Mereka mengatur hari-hari mereka kedalam bagian-bagian yang rapi dan mengalokasikan waktunya untuk mendengar, dan akan sangat memperlmasalahkan bila sesinya melewati batas waktu.

Orang tipe ini mengelola waktunya dengan berbicara tentang ketersediaan waktu dan mencari jawaban-jawaban singkat terhadap permasalahan yang ada. Hal ini bisa menjengkelkan orang lain yang memusatkan perhatian pada elemen orang dan ingin bersama-sama selama mungkin.

Bahan Bacaan 5 : Komunikasi Interpersonal

Sejak manusia dilahirkan komunikasi telah menjadi bagian dari kehidupannya. Salah satu bentuk komunikasi yang kita alami pada awal permata kehidupan adalah komunikasi interpersonal. Sebagai contoh adalah tangisan seorang bayi yang baru dilahirkan. Tangisan tersebut merupakan bentuk komunikasi non-verbal yang memberikan informasi kepada kita bahwa ia telah lahir dengan selamat. Dalam bab ini akan dibahas tipe komunikasi interpersonal, model komunikasi interpersonal, hubungan komunikasi antar manusia, konflik yang terjadi, bagaimana bersikap terbuka atau membuka diri. Dan bagaimana menyampaikan sebuah tegesan tanpa melukai orang lain.

A. Pengertian Komunikasi Interpersonal

Istilah komunikasi interpersonal biasanya dipergunakan pada komunikasi antara dua orang atau lebih, dalam kondisi tatap muka. Untuk mendapatkan memperoleh komunikasi interpersonal yang efektif, perlu kiranya dipahami proses komunikasi interpersonal, metode, komponen pendukung sebuah komunikasi yang efektif. Beragamnya pola kehidupan manusia, cara berpikir, sifat-sifat, dan budayanya, telah menyebabkan beragamnya tipe atau jenis komunikasi interpersonal



1. Definisi

Komunikasi interpersonal berbeda dengan jenis komunikasi yang lain, karena komunikasi interpersonal hanya melibatkan beberapa orang saja. Secara fisik jarak mereka berdekatan; banyak sensor yang dapat dipergunakan, dan umpan balik yang diharapkan dari komunikaat dapat diperoleh secara langsung

Secara sederhana komunikasi interpersonal dapat didefinisikan sebagai pertukaran informasi antar manusia secara verbal atau non-verbal dengan tujuan berbagi informasi dan mendapatkan umpan balik.

2. Fungsi Komunikasi Interpersonal

Maksud dan tujuan orang berkomunikasi sebenarnya adalah menyampaikan informasi atau pesan, dan sebaliknya untuk memperoleh informasi. Beberapa fungsi komunikasi interpersonal adalah

a. Untuk Menambah Informasi (Gaining Information);

Teori penetrasi social mengatakan bahwa seseorang berusaha untuk mendapatkan informasi tentang orang lain. Dengan mengenal seseorang lebih dekat maka kita akan dapat memperoleh informasi lebih banyak tentang orang tersebut, baik secara (1) pasif yaitu dengan mengamati orang tersebut; secara (2) aktif yaitu dengan bantuan orang lain; secara (3) interaktif yaitu keterbukaan diri orang tersebut.

b. Membangun Sebuah Pengertian (building a context of understanding)

Dalam situasi dan kaitan masalah yang berbeda, sebuah 'kata' yang diucapkan dapat memiliki banyak arti atau makna. Dengan menggunakan komunikasi interpersonal kita akan lebih dapat memahami apa yang disampaikan oleh seseorang.

'Kata' atau informasi yang diucapkan mengandung 'isi pesan' (content messages) yang menunjukkan tingkat pengertian sebuah pesan, dan disamping itu mengandung 'hubungan pesan' (relationship messages) yang terkait dengan "bagaimana pesan itu diucapkan". Isi pesan dan hubungan pesan terkirim secara bersamaan, namun masing-masing mempengaruhi arti yang dimaksudkan dalam komunikasi. Komunikasi interpersonal membantu kita untuk dapat saling memahami lebih baik.



c. Membentuk Identitas (*establishing identity*)

Peran dalam sebuah komunikasi interpersonal akan membentuk identitas diri kita. Termasuk didalamnya wajah atau penampilan kita yang menunjukkan citra diri kita. Sebenarnya 'peran' dan penampilan seseorang terbentuk karena pergaulan di lingkungan sekeliling kita. Sebagai contoh : seseorang yang menjadi direktur haruslah bertindak dan berperilaku sebagaimana layaknya seorang pimpinan (walaupun sebenarnya ia tidak layak dan tidak mampu menjadi direktur).

d. Memperoleh Kebutuhan Pribadi (*interpersonal needs*). Seseorang terlibat dalam komunikasi interpersonal, sebenarnya lebih didorong oleh keinginannya untuk mengekspresikan diri dan mendapatkan pemenuhan kebutuhan individunya.

Berdasarkan pengamatan William Schultz sebagai individu manusia memiliki tiga kebutuhan, yaitu:

- Pencantuman Diri (*inclusion*), yaitu kebutuhan untuk membentuk identitas diri bersama dengan orang lain. Sebagai contoh: terdaftar dan menjadi bagian dari sebuah komunitas.
- Pengawasan (*control*), yaitu suatu kebutuhan seseorang untuk dapat mempraktikkan kemampuannya memimpin, dan kemudian mendapatkan pengakuan atas kemampuan tersebut. Sebuah kelompok merupakan wadah yang baik untuk mewujudkan kebutuhan ini.
- Persahabatan, kesenangan/kenyamanan (*affection*), yaitu kebutuhan untuk mengembangkan hubungan dengan orang lain atau bermasyarakat. Sebuah kelompok atau komunitas.

B. Tipe Pesan Interpersonal

Albert Mehrabain (1972) seorang profesor di bidang komunikasi menyatakan berdasarkan penelitian yang dilakukannya, hanya 7% dari pesan atau informasi terkomunikasikan melalui saluran/cara verbal; 38% melalui *paralanguage* yang umumnya melalui penggunaan suara, sedangkan sebanyak 55% tersampaikan melalui non-verbal. Terdapat dua tipe pesan yaitu pesan verbal dan pesan non-verbal.



1. Pesan Verbal

Untuk melakukan komunikasi verbal diperlukan sebuah “bahasa” (*language*). Secara semantik “bahasa” didefinisikan sebagai sekelompok label yang dipergunakan untuk menyatukan pikira, waktu, dan ruang. Label ini dapat disampaikan dari sari kesatuan (*entity*) ke yang lainnya melalui berbagai sarana termasuk suara, tulisan, dan sebagainya.

Untuk dapat melakukan komunikasi verbal dengan baik, diperlukan penguasaan minimal lima keterampilan, yaitu:

a. Cara pengenalan pribadi

- Dalam pengenalan pendahuluan kita harus berbicara secara jelas dan efektif.
- Perkenalkan terlebih dahulu orang yang dituakan, dan kemudain perkenalkan yang muda kepada yang dituakan.
- Sebutkan nama para wanita terlebih dahulu sebelum menyebutkan nama-nama para pria.
- Perkenalkan dan sebut nama-nama dari orang yang memiliki posisi atau para pejabat pemerintahan.

b. Cara menangani percakapan melalui Telepon:

- Hindari pertengkaran atau cekcok dengan pelanggan dalam telepon. Mintalah kepada orang yang lebih tinggi posisi atau kedudukannya, yang menangani masalah tersebut.
- Dalam hal percakapan yang berhubungan dengan kantor, sebutkan nama dan posisi anda serta nama kantor di mana anda bekerja dengan sopan.
- Akhiri pembicaraan di telepon dengan ucapan terima kasih.

c. Cara memberikan penjelasan:

- Berikan deskripsi yang jelas untuk menghemat waktu dan menghindari kekesalan lawan bicara.
- Buat langkah-langkah dalam memberi deskripsi, dan pada akhir percakapan jangan lupa untuk menanyakan apakah penjelasan atau deskripsi yang diberikan telah dapat dipahami dengan jelas.



d. Cara menyampaikan pertanyaan

- Diperlukan keterampilan untuk mengajukan pertanyaan yang cerdas, berbobot secara efektif.
- Semakin spesifik pertanyaan yang diajukan, semakin besar peluang untuk mendapatkan informasi yang diharapkan.

e. Cara menyampaikan cerita

- Cara yang paling mudah untuk menyampaikan informasi adalah dengan cara bercerita.
- Sampaikan permasalahan secara umum, jelas, dan yang diperkirakan dapat menambah informasi untuk pendengarnya. Sampaikan kebenaran, jangan membesar-besarkan masalah.

Komunikasi verbal bulalah satu-satunya sarana untuk melakukan komunikasi. Satu hal yang pasti adalah, bahwa apapun alat yang dipergunakan dalam komunikasi verbal, ia harus berkaitan dengan indera (*sense*) para pelaku komunikasi.

2. Pesan Non Verbal

Komunikasi non verbal adalah berbentuk komunikasi yang dilakukan tanpa mempergunakan bahasa (language). Yang termasuk dalam komunikasi non-verbal adalah ekspresi wajah, tatapan mata, nada suara, gerakan dan sikap tubuh, dan cara memposisikan diri dalam kelompok. Secara sederhana komunikasi non-verbal dapat diumpamakan sebagai pengiriman dan penerimaan pesan dalam berbagai cara, tanpa menggunakan kode-kode verbal atau kata-kata.

Menurut Mark Knapp (1978) penggunaan kode non-verbal dalam berkomunikasi memiliki fungsi untuk : meyakinkan apa yang diucapkan (*repetition*); diungkapkan dengan kata-kata (*substitution*); menunjukkan jati diri sehingga orang dapat mengenalnya (*identity*); menambah atau melengkapi ucapan-ucapan yang dirasakan belum sempurna. G.W. Porter membagi komunikasi non-verbal dalam empat kategori

- a. *Physical* : kategori komunikasi ini menggunakan bagian tubuh kita antara lain ekspresi wajah, nada suara, gerakan tubuh gambar 9 adalah gambar



yang direkam setelah terjadinya gempa bumi di Bantul, Yogyakarta. Seorang bocah yang sedang jongkok dengan tatapan menompang dagu. Ekspresi tubuhnya mengirimkan 'pesan' yang kita pahami bahwa anak tersebut sedang dalam duka, karena sesuatu telah terjadi pada dirinya (dalam hal ini hancurnya rumah tinggalnya akibat gempa bumi di Bantul, Yogyakarta)

Gambar 10 menggambarkan seorang bayi berumur empat bulan dalam pelukan ibunya. Bayi tersebut membelekkan mata karena pengaruh cahaya lampu kamera. Di lain pihak bibir bundanya mengembangkan senyum bahagia karena akan segera memiliki gambar dirinya dengan sang buah hati.

- b. *Aesthetic*; Komunikasi yang dapat dilakukan melalui ekspresi yang kreatif dan menarik. Contoh gambar 11 menunjukkan seorang pemain gitar terkenal yang sedang memainkan gitarnya dengan penuh perasaan.
- c. *Signs*; Komunikasi kategori mekanik, antara lain penggunaan bendera isyarat pada gambar 'semaphore', yang dipergunakan untuk mengirim berita. Setiap posisi bendera menggambarkan symbol tertentu (dalam hal ini huruf dan angka), dan apabila dirangkaikan akan membentuk satu pesan.
- d. *Symbolic*; Komunikasi yang menggunakan symbol keagamaan, status, tempat. Gambar 13 adalah gambar ka'bah yang merupakan salah satu symbol agama Islam, sebagai penunjuk arah bagi umat Islam diseluruh dunia saat mereka akan melakukan sholat lima waktu. Cara non-verbal merupakan cara komunikasi yang tidak terikat oleh bahasa dan konsep.

C. Jenis Hubungan Komunikasi Interpersonal

Dalam sebuah organisasi, sebuah rapat, diskusi tentang proyek, review tentang kinerja pegawai dapat dianggap sebagai komunikasi interpersonal. Komunikasi interpersonal tidak lagi bersifat interpersonal apabila terlalu banyak orang yang terlibat di dalamnya.

Komunikasi ini akan berubah sifat menjadi komunikasi kelompok atau komunikasi public. Untuk itulah maka komunikasi interpersonal dapat dipilah-pilah berdasarkan jumlah orang yang terlibat dalam komunikasi tersebut

1. Komunikasi dengan diri sendiri (*intrapersonal Communication*)



Komunikasi interpersonal adalah komunikasi yang terjadi dalam diri kita masing-masing. Komunikasi terjadi lebih kepada mendengarkan hati nurani diri kita.

2. Komunikasi antar manusia (*Interpersonal Communication*)

Komunikasi ini adalah komunikasi yang dilakukan anatara dua orang atau lebih dapat dilakukan secara langsung dan umpan balik terhadap pesan dapat langsung diterima pada saat itu juga.

a. Sikap Pasif atau non-asertif (*passive*):

Sikap pasif berkaitan dengan ketidak-mampuan atau ketidakmauan seseorang untuk mengemukakan pendapat, pikiran atau perasaannya. Orang yang pasif cenderung akan melaksanakan sesuatu yang tidak mereka kehendaki berbagai alasan (*excuses*) daripada menyampaikan apa yang mereka inginkan.

Dalam komunikasi ini pengirim pesan akan menyimpan atau memendam pikiran dan pendiriannya, dan lebih mengutamakan pendapat orang lain.

b. Sikap Tegas (*Assertive*)

Orang dengan perilaku asertif akan menyatakan dengan gamblang pendirian mereka, apa yang mereka pikir, dan teguh pada keyakinannya, tanpa melukai orang lain.

c. Sikap Agresif (*Agressive*)

Agresif berkaitan dengan perilaku seseorang yang reaktif secara berlebihan, mengeritik dan menyalahkan orang lain. Untuk dapat memperoleh apa yang dikehendakinya orang dengan sifat ini akan menempuh jalan apa saja untuk dapat menguasai lawan komunikasinya, memaksakan kehendaknya, tanpa memperhatikan hak orang lain. Mereka tidak segan-segan melakukan intimidasi, bahkan melakukan perkelahian.

3. Komunikasi Kelompok (*Group Communication*)

Komunikasi jenis kelompok dilakukan oleh lebih dari dua orang. Kelompok ini dapat berbentuk dalam kelompok besar dan kelompok kecil. Mereka dikatakan 'kelompok' karena mereka berada dalam ruang yang sama, pada saat yang bersamaan, dan ada satu orang yang berfungsi sebagai



komunikator utama. Kadang-kadang apabila jumlah orang dalam kelompok tersebut terlalu besar, diperlukan media untuk membantu kelancaran komunikasi (contoh : *Microphone, Proyektor*)

Bateman dan Zeithami membedakan komunikasi interpersonal yang dipergunakan dalam perkantoran atau bisnis dalam enam gaya:

a. *The Controlling Style:*

Berbentuk komunikasi satu-arah yang dipergunakan untuk memberikan perintah atau instruksi pada orang lain. Pemimpin yang mempergunakan gaya ini biasanya tidak menginginkan adanya umpan balik. Mereka bertendensi lebih mempergunakan kekuasaan agar apa yang diinginkan dapat tercapai.

b. *The Egalitaria Style:*

Bebentuk komunikasi dua arah yang menyertakan para pelaku komunikasi untuk berbagi informasi. Gaya ini dipergunakan untuk memberikan stimulant pada orang lain agar mau menyatakan pendapat dan pemikirannya, sehingga diperoleh pengertian atau pemahaman yang sama. Pada umumnya dalam berbagai situasi gaya ini akan lebih efektif dibandingkan dengan gaya mengontrol, khususnya bila dibutuhkan adanya kerjasama

c. *The Structuring Style:*

Pimpinan yang menggunakan gaya ini lebih menonjolkan standard an aturan-aturan yang berlaku di kantor. Ia cenderung memaikan posisi 'aman' dengan hanya menjelaskan procedure-prosedur yang ahrus ditempuh oleh sebuah kelompok dalam melaksanakan tugasnya.

d. *The Dynamic Style:*

Sebuah gaya yang membutuhkan tenaga dan pikiran untuk memotivasi anak buah agar berani mengambil tindakan atau bertindak, misalnya pada saat kritis. Gaya ini akan efektif apabila anak buah memiliki pengetahuan yang memadai. Namun gaya ini menjadi tidak efektif apabila orang yang ditugaskan tidak memiliki kemampuan untuk melaksanakannya.



e. *The Relinquishing Style:*

Gaya yang bersifatnya lebih diferensial daripada intruksional. Pimpinan yang menerapkan gaya ini menghagai ide orang lain, dan siap mendelegasikan tanggung jawab pada orang tersebut. Gaya ini akan efektif apabila nak buah memiliki cukup pengetahuan untuk melaksanakannya, berpengalaman dan mau mengambil tanggung jawab.

f. *The Withdrawal Style:*

Merupakan suatu gaya yang mengarah pada kurangnya komunikasi. Pimpinan yang menggunakan gaya ini berusaha untuk menghindari keterlibatannya dan kemungkinan memberikan indikasi bahwa ia tidak tertarik atau tidak mau berpartisipasi dalam diskusi

4. Komunikasi Massa (*Mass Communication*)

Komunikasi ini berbeda dengan komunikasi kelompok karena pengirim pesan yang berfungsi sebagai komunikator utama, secara fisik tidak berda dalam satu ruang yang sama atau tidak berdekatan secara fisik dengan penerima pesan. Jumlah penerima atau pengirim pesan tidaklah penting, tetapi sampainya pesan ke sasaran merupakan hal yang lebih penting. Karena secara fisik mereka tidak saling melihat, maka adu argumentasi atau pendapat secara langsung tidak akan terjadi.

D. Model Hubungan Komunikasi Interpersonal

Banyak peneliti mempelajari tentang 'hubungan' (*relationship*) antar manusia. Penelitian ini dilakukan untuk dapat memahami bagaimana perkembangan sebuah hubungan interpersonal. Dalam buku ini akan diberikan model yang dibuat oleh Mak Knapp dan model yang dibuat oleh Duck.

Knapp mengembangkan 2 model' Eskalasi Hubungan' (Knapp *Relationship Escalation Model*) dan model 'Pemutusan Hubungan. (Knapp's *Relationship Termination Model*);

1. Model "Eskalasi"

Dalam model ini proses hubungan terbagi dalam 5 tahapan yang bertingkat, yaitu:

a. Tahap Perkenalan (*initiation*)



Hanya membutuhkan waktu pendek saja, antara 5-10 menit pada tahap ini kedua belah pihak hanya memberikan gambaran tentang diri masing-masing, dan umumnya dalam bentuk salam perkenalan yang bersifat sangat umum.

b. Tahap Penjajagan (*experimenting*)

Masing-masing pihak mengajukan pertanyaan-pertanyaan yang teratur dan terstruktur, untuk dapat memperoleh informasi atau gambaran keadaan masing-masing pihak. Tahap ini biasanya merupakan tahap penentuan apakah hubungan akan berlanjut atau dihentikan.

c. Tahapan pendalaman (*intensifying*):

Hubungan menjadi tidak begitu formal dan bersifat lebih mendalam. Pada tahap ini keterbukaan diri (*self-disclosure*) menjadi penting, karena pada tahap ini masing-masing pihak akan melihat secara utuh keprobadian masing-masing, dan membangun kesepakatan dan komitmen pada tahap hubungan yang dibangun.

d. Tahap Penyatuan (*integrating*):

Masing-masing pihak bergabung dan menyatu. Mereka mulai melakukan kegiatan-kegiatan secara bersama-sama, selalu mengatasnamakan kedua belah pihak dengan menyebut 'kami' (*we*). Pada tahap ini mulai terbentuk identitas kebersamaan (*shared relational identity*) antara kedua belah pihak.

e. Tahap Penguatan (*bonding*)

Hubungan yang telah terbentuk diumumkan, bahkan kadang-kadang disahkan secara hukum.

2. Model "Pemutusan" Hubungan (*Knapp's relationship termination model*)

Model ini terbagi dalam 5 jenjang pula, yaitu

a. Pembedaan (*Differentiating*):

Pada tahap ini para pihak mulai menonjolkan keakuannya. Mereka tidak lagi mempergunakan kata *kami* sebagai tanda kebersamaan tetapi lebih memilih kata *saya*. Tanpa disadari para pihak ini menunjukkan bahwa mereka memiliki kebebasan dan berhak untuk bertindak sendiri.



Keadaan ini memberikan dua arti yang bertolak belakang, yaitu bahwa mereka saling mempercayai sehingga tidak perlu selalu bersama; atau merupakan peringatan tentang hubungan kedua belah pihak yang perlu ditinjau kembali.

b. Pembatasan (*Circumcribing*):

Pada tahap ini komunikasi antara kedua belah pihak mulai berkurang. Walaupun secara kenampakan dari luar hubungan mereka adalah wajar dan normal, namun pada kenyataannya mereka condong untuk menghindari diskusi atau pembicaraan dengan topik-topik tertentu. Pada tahap ini masih dapat dilakukan usaha-usaha untuk memulihkan hubungan ke arah yang positif.

c. Kemacetan (*Stagnating*):

Merupakan tahap dimana telah terjadi kemacetan komunikasi. Kedua belah pihak berusaha untuk menghindari pembicaraan tentang hubungan mereka, karena mereka sudah dapat memperkirakan apa yang akan dikatakan oleh pihak lain. Pada tahap inilah orang mulai sabar bahwa telah terjadi sesuatu dengan hubungan mereka.

d. Penghindaran (*Avoiding*):

Tahap ini dimana kedua belah pihak secara fisik memisahkan diri. Mereka berusaha menghindari peluang-peluang untuk bersama maupun untuk berdiskusi.

e. Pemutusan (*terminating*):

Tahap ini merupakan akhir dari sebuah hubungan interpersonal. Hubungan dapat berakhir secara wajar atau tidak wajar, dan pemutusan hubungan ini pun berakhir dengan baik atau tidak baik.

Proses hubungan interpersonal Knapp dapat dijelaskan dengan gambar 14 yang berbentuk tiga kolom tangga. Tangga pertama adalah tangga yang menunjukkan tahapan dimulainya proses pembinaan sebuah hubungan interpersonal. Tangga ini diawali dengan anak tangga yang paling bawah, yaitu pengenalan, dan berakhir pada anak tangga yang paling atas, yaitu pengukuhan. Pengukuhan hubungan interpersonal ini merupakan titik tertinggi dari sebuah hubungan.



Tangga kolom ketiga adalah tangga yang menunjukkan suatu tahap pemutusan hubungan yang berawal dari munculnya ras ‘perbedaan’ antara kedua belah pihak. Secara sadar atau tidak, masing-masing pihak akan memunculkan ‘edo’nya.

Tangga kolom tengah merupakan tangga yang menunjukkan bahwa pada setiap tahapan selalu ada usaha penyelarasan atau pengendalian. Namun apabila pengendalian atau penyelarasan itu tidak berhasil, maka hubungan interpersonal akan sampai pada anak tangga yang paling bawah, yaitu pemutusan hubungan.

3. Model “Penyaringan Hubungan” (*Duck’s Relationship Filtering Model*):

Model yang dikembangkan oleh Duck ini mengandalkan saringan(*filters*) yang dipergunakan untuk memilih tahap hubungan yang ingin dibangun dengan orang lain. Model penyaringan dilakukan melalui 4 isyarat:

a. *Sociological/ Incidental Cues*;

Saringan pertama ini menggambarkan kendala-kendala yang akan terjadi dalam pertemuan kita dengan orang lain, sebagai akibat lokasi tempat tinggal atau tempat kerjanya.

b. *Preinteraction Cues*;

Adanya informasi awal yang kita peroleh tentang seseorang yang belum pernah kita temui, kadang-kadang sudah dapat memberikan masukan, apakah kita akan menjalin hubungan dengan orang tersebut atau tidak.

c. *Interact Cues*;

Setelah kita mulai berinteraksi dengan orang lain, kita dapat menentukan apakah kita akan melanjutkan hubungan dengan orang tersebut.

d. *Cognitive Cues*;

Merupakan tahapan yang lebih dalam dari hubungan yang dirintis. Pada tahap ini saatnya kita menentukan pilihan, atas dasar kepribadian dan tingkat di mana keserasian dua pihak akan terjadi

e. Keterampilan Dalam Komunikasi Interpersonal

Komunikasi interpersonal yang efektif lebih dari hanya sekedar berbicara dan mendengarkan. Komunikasi ini berkaitan dengan pembinaan hubungan antar manusia yang ditandai dengan kerjasama, kejujuran, ketepatan, keterbukaan dan



saling menghargai. Banyak aspek yang mempengaruhi pembentuk sebuah hubungan interpersonal, namun dalam buku ini hanya akan membahas beberapa aspek dasar saja, yaitu ; keterbukaan (self-disclosure, ketegasan seseorang (*assertiveness*), dan mengenali konflik.

1. Membuka diri (*Self Disclosure*)

Membuka diri merupakan strategi yang berguna untuk berbagi informasi dengan orang lain. Dengan berbagi informasi maka kedekatan individu dan hubungan interpersonal akan lebih dekat semakin kuat. Membuka diri biasanya dilakukan pada saat kita pertama kali bertemu dengan orang lain.

- Ensiklopedia online Wikipedia menuliskan bahwa Self-disclosure atau membuka diri adalah “ suatu tindakan yang dilakukan secara sadar maupun tidak untuk mengungkapkan tentang diri kita kepada orang lain”. Self-disclosure termasuk di dalamnya pemikiran, perasaan, aspirasi, tujuan, kesalahan, sukses, impian, senang atau ketidak-senangan seseorang.
- Rebecca Perillo dari universitas Southern Maine mendefinisikan bahwa “ membuka diri adalah sebuah proses penyediaan informasi untuk individu lain;. Informasi yang dibuka termasuk pendapat seseorang, perasaan, pengalaman masa lalu, dan rencana kedepan. Membuka diri memegang peranan kunci dalam pengembangan hubungan dan digambarkan sebagai komponen yang dapat menyelaraskan dan membangun sebuah hubungan.
- Membuka diri merupakan karakteristik pribadi. Fisher dan Adams menyatakan bahwa semua pengetahuan tentang diri kita dapat diklasifikasikan dalam dua kategori yaitu ‘ pengetahuan publik’ (apa yang boleh diketahui oleh public tentang kita), dan ‘pengetahuan pribadi’ (yang diketahui oleh kita sendiri). Jadi apabila seseorang membuat diri kepada orang lain, berarti ia memberikan informasi pribadinya untuk dapat diketahui oleh umum

Salah satu cara untuk melihat proses dan fungsi seseorang membuka diri adalah dengan mempergunakan Johari Window.



2. Jendela Johari (Johari Window)

Luft dan Harry Ingham adalah dua orang peneliti yang menyatakan bahwa dalam diri manusia terdapat aspek-aspek dari kepribadiannya yang terbuka dan diketahui umum, namun ada pula yang hanya diketahui oleh dirinya sendiri. Pada saat yang sama ada pula hal-hal mengenai dirinya yang diketahui oleh orang lain, namun dirinya sendiri tidak mengetahui.

Ada pula sisi atau bagian dari seseorang yang diketahui siapapun, baik oleh dirinya sendiri maupun oleh orang lain.

Jendela Johari adalah salah satu model yang dapat dipergunakan untuk menggambarkan proses interaksi antar manusia. Model yang dikenal sebagai Jendela Johari (Johari Window) mempergunakan empat kotak atau jendela, untuk menggambarkan dua sumber informasi yaitu “diri sendiri” dan “orang lain”. Kotak segiempat dibayangkan sebagai “ruang interpersonal” atau kawasan interpersonal. Model ini membantu kita untuk memahami proses hubungan interpersonal termasuk hambatan-hambatan dan peluang yang ada dalam sebuah kelompok. Jendela Johari memberikan kepada kita sebuah cara untuk melihat bagaimana kepribadian seseorang dinyatakan.

a. Kawasan Terbuka (The Public Area)

Jendela ini menggambarkan kawasan di mana orang dapat memperoleh informasi tentang diri kita atau seseorang. Informasi yang ada pada kawasan ini bukan saja berupa hal-hal yang sifatnya factual, tetapi juga perasaan, keinginan, harapan dan lain mengetahui kekuatan dan kelemahan seseorang atau diri kita.

b. Kawasan Buta (The Blind Area)

Kawasan ini berisikan hal-hal tentang diri kita sendiri yang diketahui oleh orang lain tetapi kita sendiri tidak mengetahuinya. Hal-hal ini dapat bersifat negative atau positif, dan mempengaruhi penilaian orang terhadap diri kita.

c. Kawasan Tak Dikenal (The Unknown Area)

Kawasan ini berisikan hal-hal tentang diri kita yang tidak diketahui oleh siapapun, baik oleh diri kita sendiri maupun oleh orang lain. Salah satu penyebabnya, kemungkinan karena kita belum pernah



memunculkannya di depan umum, atau kemungkinan terkubur jauh dalam diri kita.

d. Kawasan Privat (The Hidden Area)

Kawasan ini berisi hal-hal yang hanya diketahui oleh diri kita sendiri dan bersifat pribadi, bukan merupakan konsumsi umum atau orang lain atau konsumsi public.

Proses pemindahan informasi dari wilayah tersembunyi yang bersifat pribadi ke jendela umum untuk memperbesar wilayah umum disebut sebagai membuka diri atau “self-disclosure”.

Harus dipahami bahwa membuka diri merupakan proses yang rumit. Diperlukan adanya keberanian dan niatan yang cukup besar untuk membuka diri lebih banyak.

Untuk dapat meningkatkan hubungan interpersonal diperlukan keberanian untuk membuka diri oleh kedua belah pihak. Membuka diri oleh memberikan lebih banyak informasi tentang siapa diri kita kepada pihak lain. Pada gambar 16 terlihat bahwa dengan mendorong garis vertikal ke sebelah kiri, kawasan umum akan menjadi lebih besar dan kawasan privat akan lebih menjadi kecil. Disamping itu dengan bekal umpan balik dari pihak lain kita akan lebih mengetahui informasi yang tentang diri kita, yang tidak diketahui.

Satu hal yang perlu kita sadari terlalu membuka diri dapat membawa dampak yang kurang baik, bagi diri kita pribadi maupun bagi hubungan interpersonal yang kita bangun.

3. Keterampilan Asertif (Assertiveness Skill)

Keterampilan asertif adalah kemampuan seseorang untuk menyampaikan pemikiran-pemikiran dan perasaan yang bersifat positif maupun negatif, dengan cara terbuka, jujur, dan langsung. Kita bertanggung jawab terhadap diri sendiri kita dan tindakan kita, tanpa menghakimi atau menyalahkan orang lain. Hal ini memberikan kemampuan kepada kita untuk berdebat secara konstruktif dan mencari solusi yang dapat diterima oleh dua belah pihak.

Ketegasan dalam komunikasi dan hubungan sosial menyangkut keterbukaan, kejujuran, dan ketetapan, teguh (firm) pada tempatnya dan fleksibel.



Beberapa keuntungan yang dapat diperoleh dari penggunaan komunikasi asertif, antara lain: memberikan kenyamanan pada kita dan juga orang lain; mengarahkan pada perkembangan untuk saling menghargai; meningkatkan harga diri; membantu pencapaian sasaran yang kita harapkan; memperkecil kemungkinan menyakiti orang lain.

Di lain pihak apabila ketegasan terlalu jauh sampai kepada pengambilan keuntungan dari orang lain, ini akan berubah menjadi hak orang lain dan membuat mereka merasa dibawah.

Di samping keuntungan terdapat pula kerugian-kerugian dalam penggunaan komunikasi asertif. Ia berisiko bahwa kemungkinan orang lain tidak memahaminya, sehingga tidak dapat menerima gaya komunikasi asertif ini.

Terdapat enam karakteristik utama dalam komunikasi asertif, yaitu: tapan mata (eye contact), bentuk tubuh (body posture), isyarat (gesture), suara (voice), waktu(timing), isi (content) pembicaraan.

Satu hal yang pasti adalah komunikasi asertif bukanlah merupakan tindakan yang agresif (*NOT Being Aggressive*), namun merupakan sebuah pilihan (choice)

4. *I-Message* dan *You-Message*

“I-Message” adalah cara yang baik untuk memberitahukan kepada orang lain apa yang anda pikirkan. I-message terdiri dari tiga bagian, yaitu ‘perilaku’ (*behavior*) yang ditunjukkan oleh orang lain; ‘dampak’ (*effect*) yang terjadi sebagai akibat perilaku yang ditunjukkannya; dan ‘perasaan’ (*feeling*) dari orang yang terkena perilaku tersebut. Dengan menggunakan pesan-pesan yang memperhatikan tiga kata tersebut di atas, berarti kita telah memberikan informasi yang lengkap, tanpa celah yang dapat mengakibatkan interpretasi lain atau keragu-raguan dari pihak lain. Sebagai contoh: manakala seorang anak buah terlambat hadir rapat, anda mengatakan :” Apabila anda datang terlambat(perilaku), saya merasa kesal (perasaan) karena ini berarti bahwa saya harus mengulangi informasi yang telah didengarkan oleh rekan-rekan anda sebelumnya(dampak)”. Pernyataan anda tersebut akan lebih jauh lebih baik dan cukup tegas, daripada mengabaikan permasalahan atau menunjukan kemarahan anda.



“I” statement merupakan bagian dari komunikasi asertif, karena menjadi asertif termasuk kemampuan kita untuk menyatakan perasaan dan apa yang kita butuhkan secara pada tempatnya.

Salah satu cara untuk menghindari konflik interpersonal adalah menghindari melakukan penuduhan atau menuduh. Salah satu cara adalah dengan mempergunakan pernyataan-pernyataan tentang diri kita sendiri (*I-messages*) dari pada penggunaan (*you-messages*) bernada menyalahkan orang lain. ‘*you-message*’ bernada menyalahkan sedangkan ‘*i-message*’ lebih berorientasi membeberkan permasalahan tanpa menyalahkan siapapun atas kejadian tersebut. Namun demikian perlu dipahami bahwa penggunaan *I-message* kadang-kadang dapat menyulitkan, karena orang tidak terbiasa untuk berbicara tentang dirinya sendiri atau mengungkapkan perasaan mereka.

Salah satu tantangan terbesar dalam berkomunikasi adalah kemampuan mendengarkan (*listening*). Kemampuan ini sangat penting agar kita dapat menyerap informasi, dan belajar memahaminya dari sudut pandang pemberi pesan.

5. Konflik Interpersonal

Secara sederhana konflik dapat dinyatakan sebagai sebuah “ekspresi perjuangan” antara dua orang atau kelompok atau lebih, yang saling berkaitan satu dengan lainnya. Mereka kemudian yang menyadari bahwa mereka lebih lagi sejalan, dan tak mungkin lagi untuk tampil bersama.

Ciri-ciri terjadinya konflik interpersonal adalah:

- Adanya ekspresi perjuangan; apabila gejala ini sudah terlihat, maka kedua belah pihak harus melakukan komunikasi untuk hal-hal yang dapat menimbulkan konflik.
- Adanya gejala saling menyalahkan antara kedua belah pihak; konflik terjadi karena mulai terjadi adanya perbedaan persepsi, sudut pandang.
- Memiliki mentalitas “*win-lose*”; berusaha untuk memenangkan posisinya tanpa memperhatikan posisi pihak lainnya.



Adanya ketiga gejala tadi telah nampak, maka perlu adanya tindakan untuk mengatasi konflik tersebut, karena hubungan interpersonal yang dibangun tentunya diharapkan dapat terjalin selama mungkin.

Konflik harus dikelola dan dikendalikan dengan cara:

- Mengevaluasi dan mempertimbangkan pendapat para pihak yang sedang konflik.
- Mengendalikan agar pihak-pihak yang sedang konflik mau mendengarkan dan mungkin menerima pendapat pihak lain, walaupun tidak menyenangkan.
- Bertindak netral dan berusaha untuk tidak berpihak.
- Masing-masing pihak harus berusaha untuk bertindak dan membuat strategi yang pada situasi “win-win solution”.

Konflik merupakan bagian dari hubungan interpersonal. Oleh karenanya mengelola konflik merupakan sesuatu yang terpenting jika diinginkan hubungan itu akan dapat bertahan lama.

6. Keberhasilan Komunikasi Interpersonal

Keberhasilan sebuah komunikasi dapat dilihat tiga komponen, yaitu:

a. *Outcome:*

Hasil komunikasi harus diketahui oleh semua pihak sehingga dapat ditentukan apa yang diinginkan, kapan, serta sumber daya yang diperlukan untuk mencapainya.

b. *Sensory Awareness:*

Penggunaan indera dan kepekaan kita untuk mengetahui apakah kita bergerak menuju hasil yang kita harapkan.

c. *Flexibility:*

Kemampuan untuk merubah hasil dan respon untuk dapat mencapai hasil yang kita inginkan.



Bahan Bacaan 6 : Macam-macam Metode mengajar untuk Membangun Komunikasi efektif dengan peserta didik

a. Pengertian Metoda

Metode berasal dari kata *meta* berarti melalui, dan *hodos* jalan. Jadi metode adalah jalan yang harus dilalui untuk mencapai suatu tujuan. Metode bisa berarti cara kerja yang bersistem untuk memudahkan pelaksanaan suatu kegiatan guna mencapai tujuan yang ditentukan. Menurut WJS. Poerwadarminta dalam Kamus Besar Bahasa Indonesia, (1999:767) Metode adalah cara yang telah teratur dan terpikir baik-baik untuk mencapai suatu maksud. Berdasarkan definisi di atas, penulis dapat mengambil kesimpulan bahwa metode merupakan jalan atau cara yang ditempuh seseorang untuk mencapai tujuan yang diharapkan.

Metode mengajar adalah suatu pengetahuan tentang cara-cara mengajar yang dipergunakan oleh guru atau instruktur. Dalam pengertian lain metode adalah teknik penyajian yang digunakan oleh guru untuk mengajar atau menyajikan bahan pelajaran kepada siswa di dalam kelas agar pelajaran tersebut dapat ditangkap, dipahami dan digunakan oleh siswa dengan baik.

Mengajar sebagai bagian penting dari upaya mencapai tujuan pendidikan tidak dapat dipisahkan dari hakikat pendidikan itu sendiri sebagai suatu bentuk usaha untuk memanusiakan manusia. Jika dihubungkan dengan pengertian pendidikan diarahkan untuk meningkatkan kecerdasan serta dapat memenuhi kebutuhan pembangunan nasional dan bertanggung jawab atas pembangunan bangsa sehingga alam lingkungan sekolah dimaksudkan sebagai lembaga untuk mewujudkan tujuan pendidikan nasional sebagaimana yang ditegaskan dalam UU Republik Indonesia No. 20 Tahun 2003 tentang Sistem Pendidikan Nasional yaitu mengembangkan potensi peserta didik agar menjadi manusia yang beriman dan bertaqwa kepada Tuhan Yang Maha Esa, berakhlak mulia, sehat, berilmu, cakap, kreatif, mandiri, dan menjadi warga negara yang demokratis serta bertanggung jawab.

Siswa sebagai sasaran pembelajaran, dituntut untuk meningkatkan kemampuan belajarnya sehingga dapat memiliki hasil belajar yang baik agar tujuan pendidikan dapat tercapai. Dalam upaya meningkatkan hasil belajar siswa, maka



salah satu komponen yang perlu mendapat perhatian adalah penggunaan metode mengajar yang tepat agar siswa dapat menguasai dan memahami konsep-konsep materi pembelajaran dan keterampilan.

Metode mengajar merupakan salah satu aspek yang sangat penting oleh guru dalam proses belajar mengajar di sekolah. Dengan menggunakan metode mengajar yang tepat diharapkan siswa dapat memahami secara optimal materi pelajaran yang diajarkan oleh guru. Menurut Djayadisastra (1985:13) mengemukakan bahwa “berhasil tidaknya siswa dalam pembelajaran sangat tergantung pada tepat atau tidaknya metode mengajar yang dipergunakan oleh guru”.

Salah satu usaha yang tidak pernah guru tinggalkan adalah bagaimana memahami kedudukan metode sebagai salah satu komponen yang ikut ambil bagian bagi keberhasilan kegiatan belajar mengajar.

Menurut Winarno yang dikutip oleh Suryosubroto (2002:148) metode pengajaran adalah cara-cara pelaksanaan daripada proses pengajaran, atau soal bagaimana teknisnya sesuatu bahan pelajaran diberikan kepada siswa di sekolah.

b. Ragam Metoda Mengajar

Metode mengajar banyak macam dan jenisnya, setiap jenis metode mengajar mempunyai kelemahan dan kelebihan masing-masing, tidak menggunakan satu macam metode saja, mengkombinasikan penggunaan beberapa metode yang sampai saat ini masih banyak digunakan dalam proses belajar mengajar. Menurut Nana Sudjana (dalam buku *Dasar-dasar Proses Belajar Mengajar*, 1989:78 – 86), terdapat bermacam-macam metode dalam mengajar, yaitu Metode ceramah, Metode Tanya Jawab, Metode Diskusi, Metode Resitasi, Metode Kerja Kelompok, Metode Demonstrasi dan Eksperimen, Metode sosiodrama (*role-playing*), Metode *problem solving*, Metode sistem regu (*team teaching*), Metode latihan (*drill*), Metode karyawisata (*Field-trip*), Metode survai masyarakat, dan Metode simulasi. Untuk lebih jelasnya, penulis uraikan sebagai berikut:

- 1) Metode ceramah adalah penuturan bahan pelajaran secara lisan. Metode ini tidak senantiasa jelek bila penggunaannya betul-betul disiapkan dengan baik, didukung dengan alat dan media, serta memperhatikan batas-batas kemungkinan penggunaannya. Metode ini seringkali digunakan guru dalam



menyampaikan pelajaran apabila menghadapi sejumlah siswa yang cukup banyak, namun perlu diperhatikan juga bahwa metode ini akan berhasil baik apabila didukung oleh metode-metode yang lain, misalnya metode tanya jawab, latihan dan lain-lain. Guru harus benar-benar siap dalam hal ini, karena jika disampaikan hanya ceramah saja dari awal pelajaran sampai selesai, siswa akan bosan dan kurang berminat dalam mengikuti pelajaran, bahkan bisa-bisa siswa tidak mengerti apa yang dibicarakan oleh gurunya.

- 2) Metode Tanya Jawab adalah metode mengajar yang memungkinkan terjadinya komunikasi langsung yang bersifat *who way traffic*, sebab pada saat yang sama terjadi dialog antara guru dan siswa. Guru bertanya siswa menjawab atau siswa bertanya guru menjawab. Dalam komunikasi ini terlihat adanya hubungan timbal balik secara langsung antara guru dengan siswa.
- 3) Metode Diskusi adalah tukar menukar informasi, pendapat dan unsur-unsur pengalaman secara teratur dengan maksud untuk mendapat pengertian yang sama, lebih jelas dan lebih teliti tentang sesuatu atau untuk mempersiapkan dan merampungkan keputusan bersama. Oleh karena itu diskusi bukanlah debat, karena debat adalah perang mulut orang beradu argumentasi, beradu paham dan kemampuan persuasi untuk memenangkan pahamnya sendiri. Dalam diskusi tiap orang diharapkan memberikan sumbangan sehingga seluruh kelompok kembali dengan paham yang dibina bersama.
- 4) Metode Resitasi, tugas tidak sama dengan pekerjaan rumah, tetapi jauh lebih luas dari itu. Tugas dapat dilaksanakan di rumah, di perpustakaan, di sekolah atau di tempat lainnya. Tugas merangsang anak untuk aktif belajar baik secara individu maupun secara kelompok.
- 5) Metode kerja kelompok adalah siswa dalam satu kelas dipandang dalam satu kesatuan (kelompok) sendiri atau pun dibagi atas kelompok-kelompok kecil (sub-sub kelompok).
- 6) Metode demonstrasi dan eksperimen adalah metode mengajar yang sangat efektif, sebab membantu para siswa untuk mencari jawaban dengan usaha sendiri berdasarkan fakta yang benar. Demonstrasi yang dimaksud ialah suatu metode mengajar yang memperlihatkan bagaimana proses terjadinya sesuatu.



- 7) Metode sosiodrama (role-playing), sosiodrama pada dasarnya mendramatisasikan tingkah laku dan hubungannya dengan masalah sosial.
- 8) Metode problem solving, metode ini bukan sekedar metode mengajar tetapi juga merupakan satu metode berfikir, sebab dalam solving dapat menggunakan metode lainnya dimulai dari menarik data sampai menarik kesimpulan.
- 9) Metode sistem regu (team teaching), merupakan metode mengajar dua orang guru atau lebih bekerjasama mengajar sebuah kelompok siswa, jadi kelas dihadapi beberapa guru. Sistem regu banyak macamnya, sebab untuk satu regu tidak senantiasa guru secara formal saja, tetapi dapat melibatkan orang-orang luar yang dianggap perlu sesuai dengan keahlian yang kita butuhkan.
- 10) Metode simulasi, simulasi berasal dari kata simulate yang artinya pura-pura atau berbuat seolah-olah. Kata simulation artinya tiruan atau perbuatan yang pura-pura. Dengan demikian, simulasi dalam metode mengajar dimaksud sebagai cara untuk menjelaskan sesuatu (bahan pelajaran) melalui proses tingkah laku imitasi atau bermain peran mengenai suatu tingkah laku yang dilakukan seolah-olah dalam keadaan yang sebenarnya. Penggunaan simulasi sangat populer di kalangan masyarakat terutama simulasi. Contoh dalam PEMILU. Dalam belajar juga ini penting agar siswa tahu tentang kondisi riil lapangan yang terkait dengan pembelajar konsep, masalah, dan fakta.
- 11) Pembelajaran Langsung (DL=Direct Learning). Pengetahuan yang bersifat informasi dan prosedural yang menjurus pada ketrampilan dasar akan lebih efektif jika disampaikan dengan cara pembelajaran langsung. Sintaknya adalah menyiapkan siswa, sajian informasi dan prosedur, latihan terbimbing, refleksi, latihan mandiri, dan evaluasi. Cara ini sering disebut dengan metode ceramah atau ekspositori (ceramah bervariasi).
- 12) Problem Solving. Dalam hal ini masalah didefinisikan sebagai suatu persoalan yang tidak rutin, belum dikenal cara penyelesaiannya. Justru problem solving adalah mencari atau menemukan cara penyelesaian (menemukan pola, aturan, atau algoritma). Sintaknya adalah: sajikan permasalahan yang memenuhi kriteria di atas, siswa berkelompok atau individual



- mengidentifikasi pola atau aturan yang disajikan, siswa mengidentifikasi, mengeksplorasi, menginvestigasi, menduga, dan akhirnya menemukan solusi.
- 13) Pembelajaran Bersiklus (*cycle learning*). Ramsey (1993) mengemukakan bahwa pembelajaran efektif secara bersiklus, mulai dari eksplorasi (deskripsi), kemudian eksplanasi (empiric), dan diakhiri dengan aplikasi (aduktif). Eksplorasi berarti menggali pengetahuan rasyarat, eksplanasi berarti mengenalkan konsep baru dan alternatif pemecahan, dan aplikasi berarti menggunakan konsep dalam konteks yang berbeda.
- 14) SAVI. Pembelajaran SAVI adalah pembelajaran yang menekankan bahwa belajar haruslah memanfaatkan semua alat indra yang dimiliki siswa. Istilah SAVI sendiri adalah kependekan dari: Somatic yang bermakna gerakan tubuh (hands-on, aktivitas fisik) di mana belajar dengan mengalami dan melakukan; Auditory yang bermakna bahwa belajar haruslah dengan melalui mendengarkan, menyimak, berbicara, presentasi, argumentasi, mengemukakan pendapat, dan menanggapi; Visualization yang bermakna belajar haruslah menggunakan indra mata melalui mengamati, menggambar, mendemonstrasikan, membaca, menggunakan media dan alat peraga; dan Intellectually yang bermakna bahwa belajar haruslah menggunakan kemampuan berpikir (minds-on) belajar haruslah dengan konsentrasi pikiran dan berlatih menggunakannya melalui bernalar, menyelidiki, mengidentifikasi, menemukan, mencipta, mengkonstruksi, memecahkan masalah, dan menerapkan.
- 15) Teams Games Tournament (TGT). Penerapan model ini dengan cara mengelompokkan siswa heterogen, tugas tiap kelompok bisa sama bisa aberbeda. Setelah memperoleh tugas, setiap kelompok bekerja sama dalam bentuk kerja individual dan diskusi. Usahakan dinamika kelompok kohesif dan kompak serta tumbuh rasa kompetisi antar kelompok, suasana diskusi nyaman dan menyenangkan seperti dalam kondisi permainan (games) yaitu dengan cara guru bersikap terbuka, ramah, lembut, santun, dan ada sajian bodoran. Setelah selesai kerja kelompok sajikan hasil kelompok sehingga terjadi diskusi kelas. Jika waktunya memungkinkan TGT bisa dilaksanakan



dalam beberapa pertemuan, atau dalam rangka mengisi waktu sesudah UAS menjelang pembagian raport. Sintaknya adalah sebagai berikut:

- a) Buat kelompok siswa heterogen 4 orang kemudian berikan informasi pokok materi dan mekanisme kegiatan
 - b) Siapkan meja turnamen secukupnya, misal 10 meja dan untuk tiap meja ditempati 4 siswa yang berkemampuan setara, meja I diisi oleh siswa dengan level tertinggi dari tiap kelompok dan seterusnya sampai meja ke-X ditempati oleh siswa yang levelnya paling rendah. Penentuan tiap siswa yang duduk pada meja tertentu adalah hasil kesepakatan kelompok.
 - c) Selanjutnya adalah pelaksanaan turnamen, setiap siswa mengambil kartu soal yang telah disediakan pada tiap meja dan mengerjakannya untuk jangka waktu tertentu (misal 3 menit). Siswa bisa mengerjakan lebih dari satu soal dan hasilnya diperiksa dan dinilai, sehingga diperoleh skor turnamen untuk tiap individu dan sekaligus skor kelompok asal. Siswa pada tiap meja turnamen sesuai dengan skor yang diperolehnya diberikan sebutan (gelar) superior, very good, good, medium. Bumping, pada turnamen kedua (begitu juga untuk turnamen ketiga-keempat dst.), dilakukan pergeseran tempat duduk pada meja turnamen sesuai dengan sebutan gelar tadi, siswa superior dalam kelompok meja turnamen yang sama, begitu pula untuk meja turnamen yang lainnya diisi oleh siswa dengan gelar yang sama.
 - d) Setelah selesai hitunglah skor untuk tiap kelompok asal dan skor individual, berikan penghargaan kelompok dan individual.
- 16) *Jigsaw*. Model pembelajaran ini termasuk pembelajaran kooperatif dengan sintaks seperti berikut ini. Pengarahan, informasi bahan ajar, buat kelompok heterogen, berikan bahan ajar (LKS) yang terdiri dari beberapa bagian sesuai dengan banyak siswa dalam kelompok, tiap anggota kelompok bertugas membahas bagian tertentu, tiap kelompok bahan belajar sama, buat kelompok ahli sesuai bagian bahan ajar yang sama sehingga terjadi kerja sama dan diskusi, kembali ke kelompok asal, pelaksanaan tutorial pada kelompok asal oleh anggota kelompok ahli, penyimpulan dan evaluasi, refleksi.



- 17) Artikulasi adalah mode pembelajaran dengan sintaks: penyampaian kompetensi, sajian materi, bentuk kelompok berpasangan sebangku, salah satu siswa menyampaikan materi yang baru diterima kepada pasangannya kemudian bergantian, presentasi di depan hasil diskusinya, guru membimbing siswa untuk menyimpulkan.
- 18) Debate adalah model pembelajaran dengan sintaks: siswa menjadi 2 kelompok kemudian duduk berhadapan, siswa membaca materi bahan ajar untuk dicermati oleh masing-masing kelompok, sajian presentasi hasil bacaan oleh perwakilan salah satu kelompok kemudian ditanggapi oleh kelompok lainnya begitu seterusnya secara bergantian, guru membimbing membuat kesimpulan dan menambahkannya bila perlu.
- 19) Role Playing, Sintak dari model pembelajaran ini adalah: guru menyiapkan skenario pembelajaran, menunjuk beberapa siswa untuk mempelajari skenario tersebut, pembentukan kelompok siswa, penyampaian kompetensi, menunjuk siswa untuk melakonkan skenario yang telah dipelajarinya, kelompok siswa membahas peran yang dilakukan oleh pelakon, presentasi hasil kelompok, bimbingan penyimpulan dan refleksi.



Aktivitas Pembelajaran

Aktivitas 1 Diskusi Kelompok: Pengantar Identifikasi Isi Materi Pembelajaran.

Sebelum melakukan kegiatan pembelajaran, lakukan diskusi dengan sesama peserta diklat di kelompok Anda untuk mengidentifikasi hal-hal berikut:

- Kesiapan apa yang diperlukan untuk mempelajari materi pembelajaran ini?
- Jelaskan kompetensi apa saja yang akan Anda capai dalam mempelajari materi pembelajaran ini?
- Sebutkan bahan bacaan apa saja yang ada di materi pembelajaran ini?
- Jelaskan cara Anda mempelajari materi pembelajaran ini?

Jawablah pertanyaan-pertanyaan di atas dengan menggunakan **LK - 1**.

Jika Anda dapat menjawab pertanyaan-pertanyaan di atas dengan baik, maka Anda bisa melanjutkan pembelajaran dengan melakukan Aktivitas Pembelajaran berikut.

Aktivitas 2 Diskusi dan Penggalan Informasi: Pengantar Komunikasi

Diskusikan dan gali informasi melalui internet tentang beberapa permasalahan berikut ini dalam kelompok Anda.

- Menurut Anda mengapa keterampilan komunikasi dalam kegiatan pembelajaran perlu dikuasai oleh Guru?
- Apa kendala umum yang terjadi yang tidak disadari oleh Guru sehingga peserta didik seringkali mengalami kesulitan menangkap materi pembelajaran?
- Bagaimana cara mengatasi hambatan komunikasi oleh Guru?

Jawablah permasalahan tersebut dalam kelompok dan tuliskan jawabannya pada **LK-2**. Selanjutnya salah satu kelompok mempresentasikan hasil diskusinya dan kelompok lain memberi tanggapan, dan widyaiswara/fasilitator bersama peserta didik memberi kesimpulan untuk penguatan materi.



Aktivitas 3: Teknik Komunikasi Efektif di Kelas

- a. Jelaskan mengapa komunikasi yang dilakukan oleh Guru harus benar-benar efektif? Akibat apa yang ditimbulkan, jika komunikasi di kelas tidak efektif?
- b. Berikan penjelasan dan contoh aplikasi dalam pembelajaran di kelas terhadap hal-hal berikut ini:
 - 1) Keterampilan Bahasa
 - 2) Bahasa Tubuh
- c. Bagaimana mengatasi kesulitan peserta didik dalam berkomunikasi?

Aktivitas 4: Komunikasi Efektif

1. Mengapa teknik komunikasi efektif penting?
2. Jelaskan jenis kegiatan yang harus anda lakukan dalam suatu pekerjaan?
3. Jelaskan 5 hukum komunikasi efektif dan berikan penjelasannya?
4. Jelaskan beberapa kebiasaan mendengar yang buruk?
5. Jelaskan beberapa kebiasaan mendengar yang baik?

Aktivitas 5: Komunikasi Interpersonal

A. Proses Interpersonal

Baca pertanyaan no 1 sampai dengan 15, kemudian berikan jawaban dengan salah satu pengertian sebagai berikut.

- A. Encode
- B. Decode
- C. Channel
- D. Message/Umpan balik
- E. Noise/Gangguan
- F. Context/Lingkungan



1. Anak-anak bermaksud membuat videotape sendiri dan mengirimkan ke neneknya, daripada menulis surat.
2.Herman berusaha mencari jalan untuk memberitahukan kepada ida, bahwa ia tidak dapat ikut berlibur ke Bali.
3.Ida menafsirkan pernyataan Herma bahwa ia tidak dapat menemaninya pergi berlibur ke Bali, sebagi ungkapan Herwan ia tidak mencintai Ida lagi.
4.Ruangan itu begitu panas dan penuh asap rokok, keadaan ini menyebabkan Ari sulit untuk berkonsentrasi pada pembicaraan temannya.
5.Lina tersenyum pada saat Lukito berbicara kepadanya.
6.Lusi sedang berkhayal tentang kencannya dengan Hary pada saat Dudi berbicara dengan dia.
7.,karena Jakob belum pernah menikah, maka sulit baginya untuk memahami mengapa Lina yang sudah menikah, berniat mengurangi waktu bertemunya dengan Jakob.
8.Richard berpikir bahwa Jon akan meninggalkan dia, pada saat Jon melambatkan tangannya.
9.Erin berasal dari keluarga kaya, dan Keti berasal dari keluarga sederhana. Mereka memiliki konflik yang sangat serius bagaimana mereka mengelola uang
10.Jessica memutuskan untuk berbohong pada kelompoknya tentang alasan mengapa ia tidak hadir dalam rapat yang diadakan kemarin
11."Sya menolak untuk berangkay", kata Dadi.
12.Levi berhasil mengemukakan alasan yang tepat untuk menyakinkan orang tuanya agar membeli sebuah mobil baru untuknya.



B. Sifat Pasif, Asersif, dan Agresif

1. Sebutkan paling sedikit 7 hal yang hilang sebagai akibat dari sifat non-asertif atau pasif yang anda miliki
2. Sebutkan paling sedikit 5 hal yang anda peroleh sebagai akibat dari sifat anda yang asertif.
3. Sebutkan kerugian yang anda peroleh sebagai akibat sifat agresif yang anda miliki.
4. Apa yang anda akan lakukan, apabila anda berdiskusi dengan orang yang memiliki tendensi selalu ingin menang.
5. Tahapan apa yang akan anda lakukan dalam mempertahankan pendapat dan konsep anda.

C. Studi Kasus

Pada saat Negara kita terkena gempa bumi dan tsunami, beredar berita tentang prediksi akan terjadi tsunami di daerah-daerah lain. Akibat dari berita ini banyak penduduk yang panik, terutama setelah ada pihak-pihak yang tidak bertanggung jawab menyampaikan pada masyarakat melalui SMS.

Telaah masalah ini dipandang dari sudut Komunikasi Interpersonal.



LEMBAR KERJA KB 1

TEKNIK KOMUNIKASI EFEKTIF DALAM PEMBELAJARAN

LK – 01 mengidentifikasi isi Materi Pembelajaran

1. Kesiapan apa yang diperlukan untuk mempelajari materi pembelajaran ini?

.....

.....

.....

2. Jelaskan kompetensi apa saja yang akan Anda capai dalam mempelajari materi pembelajaran ini?

.....

.....

.....

3. Sebutkan bahan bacaan apa saja yang ada di materi pembelajaran ini?

.....

.....

.....

4. Jelaskan cara Anda mempelajari materi pembelajaran ini?



LK - 02 Diskusi dan penggalan Informasi tentang perlunya pemanfaatan media dalam pembelajaran

1. Menurut Anda mengapa keterampilan komunikasi dalam kegiatan pembelajaran perlu dikuasai oleh Guru?

.....

.....

.....

.....

.....

2. Apa kendala umum yang terjadi yang tidak disadari oleh Guru sehingga peserta didik seringkali mengalami kesulitan menangkap materi pembelajaran?

.....

.....

.....

.....

.....

3. Bagaimana cara mengatasi hambatan komunikasi oleh Guru?

.....

.....

.....



LK – 01 mengidentifikasi isi Materi Pembelajaran

LK -03. Diskusi dan menggali informasi penerapan TIK dalam pembelajaran

1. Setelah Anda mempelajari bahan bacaan 3, dari beberapa contoh penerapan TIK yang diberikan, contoh mana yang memungkinkan dan sesuai untuk diterapkan dalam kegiatan pembelajaran di sekolah Anda!

.....

.....

.....

.....

2. Mengapa Anda memilih contoh tersebut?

.....

.....

.....

.....

3. Bagaimana langkah yang Anda lakukan untuk menerapkan TIK tersebut dalam kegiatan pembelajaran di kelas?

.....

.....

.....

.....



LK 4: Komunikasi Efektif

1. Mengapa teknik komunikasi efektif penting?.....
.....
.....
2. Jelaskan jenis kegiatan yang harus anda lakukan dalam suatu pekerjaan?
.....
.....
3. Jelaskan 5 hukum komunikasi efektif dan berikan penjelasannya?
.....
.....
4. Jelaskan beberapa kebiasaan mendengar yang buruk?
.....
.....
5. Jelaskan beberapa kebiasaan mendengar yang baik?
.....
.....

LK - 05 : Komunikasi Interpersonal

1. Sebutkan paling sedikit 7 hal yang hilang sebagai akibat dari sifat non-asertif atau pasif yang anda miliki



-
-
-
2. Sebutkan paling sedikit 5 hal yang anda peroleh sebagai akibat dari sifat anda yang asertif.
-
-
3. Sebutkan kerugian yang anda peroleh sebagai akibat sifat agresif yang anda miliki.
-
-
4. Apa yang anda akan lakukan, apabila anda berdiskusi dengan orang yang memiliki tendensi selalu ingin menang.
-
-
-
5. Tahapan apa yang akan anda lakukan dalam mempertahankan pendapat dan konsep anda.
-
-
-

LK - 06 :Macam – macam Metode Mengajar untuk Membangun Komunikasi efektif Dengan Peserta Didik



1. Untuk membangun komunikasi efektif dalam pembelajaran metode apa saja yang sering Anda gunakan di kelas?

.....
.....
.....

2. Lakukan simulasi penerapan salah satu metode mengajar sehingga terjadi komunikasi yang efektif?

.....
.....
.....

3. Berdasarkan metode yang Anda pilih apa keuntungan dan kelemahan dari masing-masing metode tersebut?

.....
.....
.....

Tugas # 1 (Mandiri):

Buatlah suatu pesan kepada siswa Anda, dalam satu bentuk format memo. Isi memo: Anda ingin meminta siswa anda agar mempersiapkan tim untuk membahas rencana pembuatan mebel yang kegiatannya mencakup rancangan berkenaan dengan penggunaan mesin, proses penyiapan bahan, hingga pembuatan dan uji coba.

Tugas # 2 (Mandiri):

Siapkan RPP Anda! Buatlah tinjauan dari segi komunikasi terhadap materi yang ada; kemudian tetapkan apa saluran komunikasi yang akan Anda gunakan agar proses penyampaian materi itu efektif dan efisien.

Buatlah dalam bentuk tabulasi skenario.

Permainan # 1 (Kelompok): **Pesta Telepon** (waktu 15 menit).

- Anda diminta membentuk kelompok yang terdiri dari 5 orang;



- Setiap orang menggunakan *ear-plug* atau *headset*
- Anggota kelompok nomor 1, menyampaikan pesan (yang akan diberikan oleh Widyaiswara/Fasilitator)
- Buat sebuah analisis atas apa yang terjadi (bentuk file ms-word, cantumkan kelompok dan nama peserta tiap kelompok) dan email ke: guruku.luarbiasa@gmail.com

Rangkuman

1. Sebagai manusia yang memiliki kebutuhan, hubungan personal akan terjadi hubungan baik akan berkembang. Keterkaitan untuk membuka diri, dan kepercayaan, dalam membentuk dan memelihara hubungan sosial dalam jangka panjang. Oleh karena itu komunikasi antara sesama manusia sangat penting terutama bagi pendidik/guru dalam melaksanakan pembelajaran di kelas..
2. Pesan atau informasi yang dikirim dalam dua tahap secara bersamaan yaitu secara verbal dan non verbal, dan untuk memiliki komunikasi yang efektif, perlu diperhitungkan faktor-faktor yang berpengaruh ruang dimana komunikasi itu terjadi, pesan verbal atau non verbal, arti yang dimaksud dengan arti yang diterima bisa saja berbeda.
3. Beberapa unsur penting dalam komunikasi yaitu adanya pengirim (*sender*), penerima pesan (*receiver*), saluran (*channel*), balikan (*feedback*), pesan (*message*), dan persepsi (*perception*) hal ini sangat berpengaruh terhadap komunikasi yang akan terjadi.
4. Penyebab kegagalan komunikasi karena tingkatan kejelasan pesan, mendorong timbulnya balikan, penggunaan bahasa yang sederhana, mendengarkan secara efektif dan membangun rasa percaya diri, oleh karena itu untuk dapat berkomunikasi dengan orang lain maka seseorang harus memahami dirinya sendiri terlebih dahulu karena konsep diri akan mempengaruhi cara seseorang berkomunikasi.
5. Dalam komunikasi interpersonal; yang sering terabaikan adalah menjadi penerima atau pendengar yang baik. Untuk menjadi penerima atau pendengar yang baik dibutuhkan kemampuan untuk mendengarkan.



6. Berkomunikasi dengan peserta didik sangatlah penting bagi guru dalam proses pembelajaran, dengan berkomunikasi yang baik akan menyampaikan berupa informasi, gagasan, arahan, harapan dan kejelasan materi pembelajaran. Melalui komunikasi guru akan dapat memotivasi sekaligus mengarahkan peserta didik untuk belajar lebih baik.
7. Beberapa metoda pembelajaran yang dapat digunakan di kelas sehingga terjadi komunikasi secara efektif baik siswa dengan siswa, siswa dengan guru.

Tes Formatif

(Per kegiatan pembelajaran. Berupa Tes Lisan, atau Tulisan, dan Perbuatan)

1. Apa yang dimaksud dengan komunikasi?
2. Mengapa Guru harus mampu berkomunikasi dengan baik?
3. Bagaimana proses komunikasi terjadi?



Kunci Jawaban

1. Komunikasi adalah proses penyampaian pesan dari satu pihak kepada pihak yang lain
2. Komunikasi merupakan hal mutlak bagi guru, oleh karena itu dijadikan sebagai salah satu komponen dari standar kompetensi guru (Permendiknas Nomor 16 Tahun 2007)
3. Membuat/menggambarkan diagram proses komunikasi (sederhana atau lengkap)

Uji Kompetensi:

Guru diminta untuk mempersiapkan sebuah topik pembelajaran yang memiliki tingkat kompetensi (C3).

Presentasi di amati oleh rekan dalam kelas, kemudian memberikan masukan terhadap aspek berikut:

1. Apakah guru tersebut berbicara dengan bahasa yang jelas?
2. Seberapa baik tata bahasa yang digunakan?
3. Berapa banyak kosa-kata yang dikuasai?
4. Apakah terdapat pelafalan yang kurang tepat?
5. Apakah Anda mengalami hal yang sama dengan rekan Anda yang melakukan presentasi?
6. Apa saran bagi guru tersebut untuk meningkatkan kemampuan komunikasinya agar semakin baik dan efektif?



PENUTUP

Setelah menyelesaikan modul ini, Anda berhak untuk mengikuti tes untuk menguji kompetensi yang telah dipelajari. Apabila Anda dinyatakan memenuhi syarat kelulusan dari hasil evaluasi dalam modul ini, maka Anda berhak untuk melanjutkan ke topik/modul berikutnya.

Mintalah pada widyaiswara untuk uji kompetensi dengan sistem penilaian yang dilakukan langsung oleh pihak institusi atau asosiasi yang berkompeten apabila peserta telah menyelesaikan seluruh evaluasi dari setiap modul, maka hasil yang berupa nilai dari widyaiswara atau berupa portofolio dapat dijadikan bahan verifikasi oleh pihak institusi atau asosiasi profesi. Selanjutnya hasil tersebut dapat dijadikan sebagai penentu standar pemenuhan kompetensi dan bila memenuhi syarat peserta berhak mendapatkan sertifikat kompetensi yang dikeluarkan oleh institusi atau asosiasi profesi.



DAFTAR PUSTAKA

Buku, diktat, modul:

Iryanti, Puji. (2008). *Pembelajaran Barisan, Deret Bilangan dan Notasi Sigma di SMA*. Yogyakarta: PPPPTK Matematika Depdiknas

Suryadi, Didi, Priatna, Nanang. (2008). *Pengetahuan Dasar Teori Graph (Modul 1)*. Bandung: tidak diterbitkan.

Deo, N. (1989). *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*. New Delhi: Prentice-Hall.

Suryadi, D. (1996). *Matematika Diskrit*. Jakarta: Universitas Terbuka.

Sutarno, H., Priatna, N., & Nurjanah (2005). *Matematika Diskrit*. Malang: UM Press.

Chartrand, G. (1985). *Introductory Graph Theory*. New York: Dover Publications.

Wibisono, Samuel. (2008). *Matematika Diskrit Edisi 2*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Internet:

Yudistira, Angga. (2013). *Kumpulan Soal dan Pembahasan Himpunan*. [Online]. Tersedia: <http://installflame.blogspot.co.id/2013/05/kumpulan-soal-dan-pembahasan-himpunan.html>. [26 Nopember 2015].



GLOSARIUM

ISTILAH	KETERANGAN
Notasi Sigma	Merupakan notasi yang digunakan untuk menyatakan penjumlahan <u>bilangan</u> , dilambangkan dengan Σ .
<i>Crisp</i>	Jelas, tegas. Menyatakan kejelasan atau ketegasan dari objek-objek himpunan
Irisan (<i>intersection</i>)	Operasi himpunan A dan B dimana $x \in A$ dan $x \in B$, dinotasikan dengan $A \cap B$
Gabungan (<i>union</i>)	Operasi himpunan A atau B dimana $x \in A$ atau $x \in B$, dinotasikan dengan $A \cup B$
Komplemen (<i>complement</i>)	Operasi himpunan universal yang bukan A dimana $x \in U$ dan $x \notin A$, dinotasikan dengan \overline{A} atau A^c .
Selisih (<i>difference</i>)	Operasi himpunan A bukan B dimana $x \in A$ dan $x \notin B$, dinotasikan dengan $A - B$ atau $A \cap \overline{B}$
Beda simetri (<i>symmetric difference</i>)	Operasi himpunan A atau B, dinotasikan dengan $A \oplus B$, yaitu $(A-B) \cup (B-A)$
Aljabar himpunan	Penerapan sifat-sifat atau prinsip operasi himpunan dalam menyederhanakan atau menguraikan kalimat himpunan
Prinsip dualitas (<i>duality principle</i>)	Dua konsep yang berbeda dapat dipertukarkan namun tetap memberikan jawaban yang benar
Prinsip inklusi-eksklusi	<p>Prinsip penjumlahan dua himpunan A dan B, dimana:</p> $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ <p>atau secara umum:</p> $ A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r = \sum_i A_i - \sum_{1 \leq i < j \leq r} A_i \cap A_j +$ $\sum_{1 \leq i < j < k \leq r} A_i \cap A_j \cap A_k + \dots +$ $(-1)^{r-1} A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_r $



Ajasensi	Kedudukan dua titik (misal P dan Q) yang dihubungkan dengan sebuah sisi e.
Derajat	Banyaknya sisi yang insiden dengan suatu titik.
Graph	Sekumpulan objek ($V = \{v_1, v_2, \dots\}$ yang disebut himpunan titik), dan sebuah himpunan lain ($E = \{e_1, e_2, \dots\}$ yang merupakan himpunan sisi) sedemikian hingga tiap sisi ek dikaitkan dengan suatu pasangan titik tak terurut (v_i, v_j) .
Graph Berarah	Suatu <i>graph</i> yang sisi-sisinya mempunyai arah.
Graph Berarah Simetris	Suatu <i>graph</i> berarah yang merupakan sebuah relasi simetris.
Graph Bertanda S	Suatu jaringan kerja tidak berarah yang nilai fungsinya +1 atau -1.
Graph Hingga	Sebuah <i>graph</i> $G(V, E)$ dengan V dan E hingga.
Graph Nol	Sebuah <i>graph</i> $G = (V, E)$ dengan $E = 0$.
Graph Sederhana	Sebuah <i>graph</i> yang tidak memiliki loop dan sisi paralel.
Graph Tak Hingga	Sebuah <i>graph</i> $G(V, E)$ dengan V dan E tak hingga
Insidensi	Kedudukan dua titik (misal P dan Q) yang terletak pada sisi e atau titik P dan Q merupakan titik ujung sisi e
Jaringan Kerja	Sebuah <i>graph</i> berarah dengan suatu fungsi yang memetakan himpunan sisi ke himpunan bilangan real.



Jaringan Kerja Berarah	Jaringan kerja yang merupakan <i>graph</i> berarah.
Jaringan Kerja Tidak Berarah	Jaringan kerja yang merupakan sebuah <i>graph</i> .
Loop	Sisi yang dua titik ujungnya sama
Seri	Dua sisi yang saling berjasensi atau berbatasan jika titik sekutunya berderajat satu
Sisi Paralel	Dua titik yang berlainan dihubungkan oleh dua sisi atau lebih.
Titik Anting/Ujung	Sebuah titik yang berderajat satu.
Titik Terisolasi	Sebuah titik yang tidak memiliki sisi insiden atau titik yang berderajat nol.
Valensi	Derajat suatu titik.

Modul

**Pengembangan Keprofesian
Berkelanjutan**



Kelompok Kompetensi

PROFESIONAL

MATEMATIKA DISKRIT

Edisi Revisi 2018



Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan
Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan
2018

MODUL PENGEMBANGAN KEPROFESIAN BERKELANJUTAN

MATEMATIKA TEKNIK

SEKOLAH MENENGAH KEJURUAN (SMK)

**TERINTEGRASI PENGUATAN PENDIDIKAN KARAKTER DAN
PENGEMBANGAN SOAL KETERAMPILAN BERPIKIR ARAS TINGGI (HOTS)**

EDISI REVISI 2018

KELOMPOK KOMPETENSI G

PROFESIONAL:

Matematika Diskrit

Penulis:

Wahyu Purnama, S.Si, M.Pd. (inisial.wp@gmail.com)

Maya Siti Rohmah, S.Si, M.Pd.

Penelaah:

Harry Dwi Putra, S.Pd., M.Pd.

Prof. Dr. Nanang Priatna, M.Pd.

Desain Grafis dan Ilustrasi:

Tim Desain Grafis

Desain Grafis dan Ilustrasi:

Tim Desain Grafis

Copyright © 2018

Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan
Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

Dilarang mengcopy sebagian atau keseluruhan isi buku ini untuk kepentingan komersial
tanpa izin tertulis dari Kementerian Pendidikan Kebudayaan



DAFTAR ISI

KATA SAMBUTAN	i
KATA PENGANTAR.....	ii
DAFTAR ISI.....	iii
DAFTAR TABEL	ix
LAMPIRAN.....	x
PENDAHULUAN	1
Latar Belakang	1
Tujuan.....	2
Peta Kompetensi	2
Ruang Lingkup	3
Saran Cara Penggunaan Modul	4
KEGIATAN PEMBELAJARAN 1	5
Pengantar	5
Rangkuman.....	16
Tes Formatif.....	17
Kunci Jawaban.....	19
KEGIATAN PEMBELAJARAN 2	21
C.Uraian Materi	22
Contoh pemetaan input-output.....	27
Ruang Input.....	27
Ruang Output.....	27
Himpunan: MUDA, PAROBAYA, dan TUA	30
Himpunan fuzzy untuk variabel Umur.....	31
Himpunan fuzzy pada variabel temperatur.	33
KEGIATAN PEMBELAJARAN 3	71
Pengantar	71
A. Tujuan.....	71
B. Indikator Pencapaian Kompetensi	71
C. Uraian Materi.....	72



Masalah Jembatan Königsberg (Rossen, 2003)	73
Representasi <i>graph</i> masalah jembatan Königsberg	74
<i>Graph</i> masalah jembatan Königsberg	75
<i>Graph</i> kosong dengan 3 simpul	75
<i>Graph</i> berarah	76
<i>Graph</i> bertetangga	77
<i>Graph</i> bersisian	77
<i>Graph</i> terpencil	78
<i>Graph</i> berderajat	78
<i>Graph</i> berderajat genap	79
<i>Graph</i> dengan lintasan	81
<i>cut-set</i>	81
<i>Graph</i> sederhana	82
<i>Graph</i> ganda	82
<i>Graph</i> semu	83
<i>Graph</i> berarah	83
<i>Graph</i> ganda berarah	84
Jenis-jenis <i>graph</i> [Rosen, 2003]	84
Grap lengkap K_n , $1 \leq n \leq 6$ (Rosen, 2003)	85
<i>Graph</i> lingkaran	85
<i>Graph</i> roda	85
K_4 adalah <i>graph</i> planar (Munir, 2003)	86
Tiga buah <i>graph</i> planar	87
<i>Graph</i> planar 4 buah daerah	87
<i>Graph</i> bipartit	88
<i>Graph</i> bipartit $G(V_1, V_2)$	88
<i>Graph</i> berbobot	89
<i>Graph</i> terhubung	89
<i>Graph</i> terhubung dan tak-terhubung	90
<i>Graph</i> berarah terhubung kuat.	90



Graph berarah terhubung lemah.....	91
Graph sederhana PQRS.....	92
Graph masalah jembatan Königsberg ABCD	93
Graph matriks bersisian	94
Graph Euler	95
Graph semi Euler	95
Ilustrasi sirkuit Hamilton.....	96
Contoh sirkuit Hamilton	97
Graph Isomorfik.....	98
Contoh Graph Isomorfik	99
Graph Homeomorfik	100
Graph Kuratowski	101
Contoh Graph Tak Planar	102
Lintasan terpendek	102
Contoh Algoritma Dijkstra	103
Jarak dari Kota Boston ke Kota-kota Lainnya.....	104
Contoh Persoalan tukang pos Cina	106
Diagram Graph Berarah.....	108
Graph berarah D1.....	109
Graph berarah simetris.....	109
Diagram graph D	109
Diagram dari dua jenis jaringan kerja.....	110
Graph bertanda	110
Jaringan kerja V	111
Graph berarah dengan loop.....	112
Silsilah keluarga	112
Jaringan komunikasi.....	113
Jaringan transportasi.....	114
Graph sederhana jembatan Königsberg	114
Desain sebuah bangunan.....	115
Graph desain bangunan	115



Ikatan kimia ethanol	116
<i>Graph</i> ikatan kimia C_2H_5OH	116
PENUTUP	125
UJI KOMPETENSI	126
DAFTAR PUSTAKA.....	135
GLOSARIUM.....	136



DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1 Peta kompetensi Pedagogi.....	2
Gambar 1.2 Peta Kompetensi Profesional.....	3
Gambar 2.3.1 Contoh pemetaan input-output.....	28
Gambar 2.3.2 Himpunan: MUDA, PAROBAYA, dan TUA.....	31
Gambar 2.3.3 Himpunan fuzzy untuk variabel Umur	32
Gambar 2.3.4 Himpunan fuzzy pada variabel temperatur	34
Gambar 2.4.1 Masalah Jembatan Königsberg.....	75
Gambar 2.4.2 Representasi <i>graph</i> masalah jembatan Königsberg.....	76
Gambar 2.4.3 <i>Graph</i> masalah jembatan Königsberg	77
Gambar 2.4.4 <i>Graph</i> kosong dengan 3 simpul	77
Gambar 2.4.5 <i>Graph</i> berarah	78
Gambar 2.4.6 <i>Graph</i> bertetangga	79
Gambar 2.4.7 <i>Graph</i> bersisian	79
Gambar 2.4.8 <i>Graph</i> terpencil	80
Gambar 2.4.9 <i>Graph</i> berderajat	80
Gambar 2.4.10 <i>Graph</i> berderajat genap	81
Gambar 2.4.11 <i>Graph</i> dengan lintasan	83
Gambar 2.4.12 <i>Cut-set</i>	83
Gambar 2.4.13 <i>Graph</i> sederhana	84
Gambar 2.4.14 <i>Graph</i> ganda	85
Gambar 2.4.15 <i>Graph</i> semu	85
Gambar 2.4.16 <i>Graph</i> berarah	85
Gambar 2.4.17 <i>Graph</i> ganda berarah	86
Gambar 2.4.18 <i>Graph</i> lengkap K_n	87
Gambar 2.4.19 <i>Graph</i> lingkaran	87
Gambar 2.4.20 <i>Graph</i> roda	87
Gambar 2.4.21 <i>Graph</i> Reguler dengan Empat Simpul Berderajat 2.....	88
Gambar 2.4.22 K_4 adalah <i>graph</i> planar	88
Gambar 2.4.23 Tiga buah <i>graph</i> planar	89



Gambar 2.4.24	Graph planar 4 buah daerah	89
Gambar 2.4.25	Graph bipartit.....	90
Gambar 2.4.26	Graph bipartit $G(V_1, V_2)$	90
Gambar 2.4.27	Graph berbobot	91
Gambar 2.4.28	Graph terhubung	91
Gambar 2.4.29	Graph terhubung dan tak-terhubung	92
Gambar 2.4.30	Graph berarah terhubung kuat	92
Gambar 2.4.31	Graph berarah terhubung lemah	93
Gambar 2.4.32	Sebuah subgraph dari suatu graph dan Komplemennya	93
Gambar 2.4.33	Spanning Subgraph dan bukan Spanning Subgraph dari G	94
Gambar 2.4.34	Graph sederhana PQRS	94
Gambar 2.4.35	Graph masalah jembatan Königsberg ABCD	95
Gambar 2.4.36	Graph matriks bersisian	96
Gambar 2.4.37	Graph Euler	97
Gambar 2.4.38	Graph semi Euler	97
Gambar 2.4.39	Ilustrasi sirkuit Hamilton	98
Gambar 2.4.40	Contoh sirkuit Hamilton	99
Gambar 2.4.41	Graph Isomorfik	100
Gambar 2.4.42	Contoh Graph Isomorfik	101
Gambar 2.4.43	Graph Homeomorfik.....	102
Gambar 2.4.44	Graph Kuratowski	103
Gambar 2.4.45	Contoh Graph Tak Planar	104
Gambar 2.4.46	Lintasan terpendek	104
Gambar 2.4.47	Contoh algoritma Dijkstra	105
Gambar 2.4.48	Contoh Persoalan perjalanan pedagang	107
Gambar 2.4.49	Contoh Persoalan tukang pos Cina.....	108
Gambar 2.4.50	Diagram Graph Berarah.....	110
Gambar 2.4.51	Graph berarah D_1	111
Gambar 2.4.52	Graph berarah simetris	111



Gambar 2.4.53. Diagram <i>graph</i> D	111
Gambar 2.4.54 Diagram dari dua jenis jaringan kerja kubus ABCD.EFGH.....	112
Gambar 2.4.55 <i>Graph</i> bertanda	112
Gambar 2.4.56 Jaringan kerja V	113
Gambar 2.4.57 <i>Graph</i> berarah dengan loop	114
Gambar 2.4.58 Silsilah keluarga	114
Gambar 2.4.59 Jaringan komunikasi.....	115
Gambar 2.4.60 Jaringan transportasi	116
Gambar 2.4.61 <i>Graph</i> sederhana jembatan Königsberg	116
Gambar 2.4.62 Desain sebuah bangunan.....	117
Gambar 2.4.63 <i>Graph</i> desain bangunan.....	117
Gambar 2.4.64 Ikatan kimia ethanol.....	118
Gambar 2.4.65 <i>Graph</i> ikatan kimia C_2H_5OH	118

DAFTAR TABEL

Tabel 2.4.1 Jarak dari Kota Boston ke Kota-kota Lainnya.....	106
--	-----



LAMPIRAN

Kegiatan Belajar 2

LK 1.1 Analisis dan <i>review</i> indikator pencapaian kompetensi	142
LK 1.2 Analisis dan <i>review</i> kecukupan materi ajar	143
LK 2 Rancangan/penyusunan pertanyaan dan permasalahan mendasar.....	144
LK 3 Eksplorasi dan pengembangan	145
LK 4 Aplikasi dan penerapan	146

Kegiatan Belajar 3

LK 1.1 Analisis dan <i>review</i> indikator pencapaian kompetensi	147
LK 1.2 Analisis dan <i>review</i> kecukupan materi ajar	148
LK 2 Rancangan/penyusunan pertanyaan dan permasalahan mendasar	149
LK 3 Eksplorasi dan pengembangan	150
LK 4 Aplikasi dan penerapan	151

Kegiatan Belajar 4

LK 1.1 Analisis dan <i>review</i> indikator pencapaian kompetensi	152
LK 1.2 Analisis dan <i>review</i> kecukupan materi ajar	153
LK 2 Rancangan/penyusunan pertanyaan dan permasalahan mendasar	154
LK 3 Eksplorasi dan pengembangan	155
LK 4 Aplikasi dan penerapan	156
LK 5 Laporan Presentasi KB 2	157
LK 5 Laporan Presentasi KB 3	157
LK 5 Laporan Presentasi KB	157



PENDAHULUAN

Latar Belakang

Pengembangan keprofesian berkelanjutan sebagai salah satu strategi pembinaan guru dan tenaga kependidikan diharapkan dapat menjamin guru dan tenaga kependidikan mampu secara terus menerus memelihara, meningkatkan, dan mengembangkan kompetensi sesuai dengan standar yang telah ditetapkan. Pelaksanaan kegiatan PKB akan mengurangi kesenjangan antara kompetensi yang dimiliki guru dan tenaga kependidikan dengan tuntutan profesional yang dipersyaratkan.

Guru dan tenaga kependidikan wajib melaksanakan PKB baik secara mandiri maupun kelompok. Khusus untuk PKB dalam bentuk diklat dilakukan oleh lembaga pelatihan sesuai dengan jenis kegiatan dan kebutuhan guru. Penyelenggaraan diklat PKB dilaksanakan oleh PPPPTK dan LPPPTK KPTK atau penyedia layanan diklat lainnya. Pelaksanaan diklat tersebut memerlukan modul sebagai salah satu sumber belajar bagi peserta diklat. Modul merupakan bahan ajar yang dirancang untuk dapat dipelajari secara mandiri oleh peserta diklat berisi materi, metode, batasan-batasan, dan cara mengevaluasi yang disajikan secara sistematis dan menarik untuk mencapai tingkatan kompetensi yang diharapkan sesuai dengan tingkat kompleksitasnya.

Untuk mempersiapkan kegiatan PKB dalam bentuk diklat bagi guru-guru matematika diperlukan adanya modul yang tepat sesuai dengan tuntutan dari Permendiknas no. 16 Tahun 2007 tentang Standar Kualifikasi Akademik dan Kompetensi Guru. Dari permendiknas tersebut, standar kompetensi guru yang dikembangkan dari kompetensi pedagogi memuat sepuluh kompetensi inti guru yang diantaranya memuat tentang penguasaan konsep komunikasi efektif dalam pembelajaran dan dari kompetensi profesional memuat tentang konsep matematika diskrit.



Tujuan

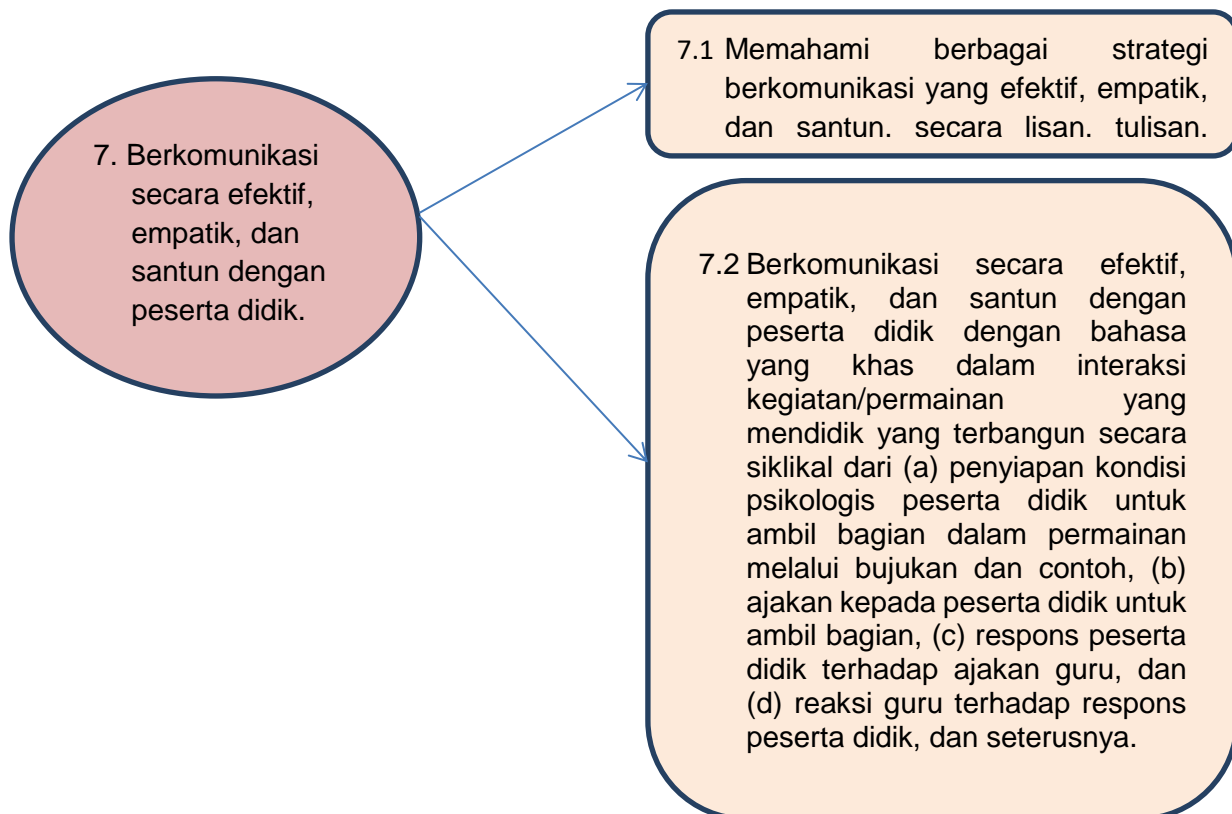
Tujuan penyusunan modul ini adalah agar peserta diklat PKB dapat menguasai konsep komunikasi efektif dalam pembelajaran dan konsep matematika diskrit melalui kegiatan diskusi dengan percaya diri.

Peta Kompetensi

Pada Gambar 1 dan Gambar 2 berikut dicantumkan daftar kompetensi pedagogi dan daftar kompetensi profesional sesuai dengan Permendiknas Nomor 16 Tahun 2007 tentang Standar Kualifikasi Akademik dan Kompetensi Guru yang akan ditingkatkan melalui proses belajar dengan menggunakan modul ini.

Gambar 1.1

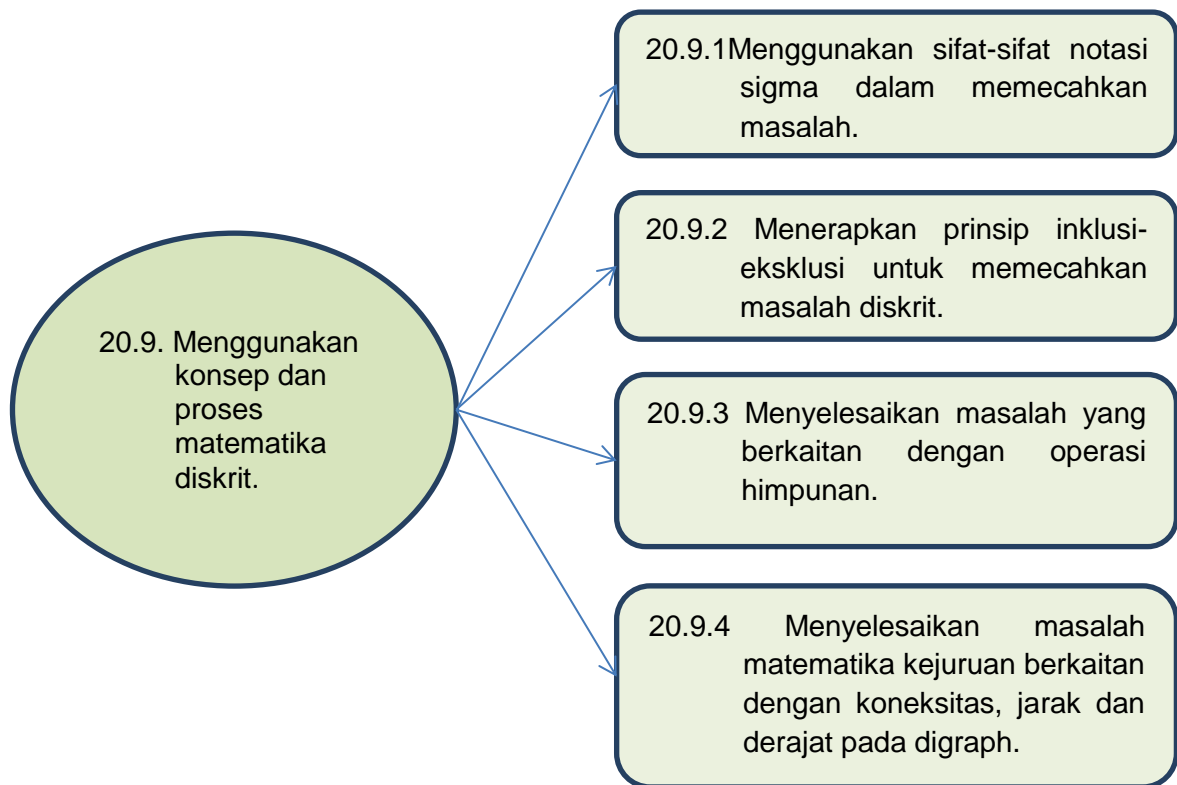
Peta Kompetensi Pedagogi





Gambar 1.2

Peta Kompetensi Profesional



Ruang Lingkup

Ruang lingkup dari modul ini berisikan kegiatan belajar untuk pengembangan kompetensi pedagogi dan kompetensi profesional. Secara rinci ruang lingkup dari modul ini adalah sebagai berikut.

1. Komunikasi Efektif dalam Pembelajaran

Berisi uraian materi tentang komunikasi secara efektif, empatik, dan santun dengan peserta didik dalam kegiatan pembelajaran.

2. Notasi Sigma

Berisi uraian materi tentang bentuk deret dalam notasi sigma, jumlah atau nilai dari notasi sigma, dan sifat-sifat notasi sigma beserta penggunaannya.

3. Himpunan



Berisi uraian materi tentang pengertian himpunan, keanggotaan, penyajian himpunan, kardinalitas, kesamaan dan himpunan bagian, himpunan kuasa, himpunan saling bebas, operasi pada himpunan, beserta sifat-sifatnya, pembuktian kalimat himpunan, prinsip dualitas, prinsip inklusi-eksklusi, dan notasi yang berkaitan dengan teori himpunan.

4. Teori *Graph*

Berisi uraian materi tentang definisi *graph*, terminologi, jenis-jenis *graph*, keterhubungan *graph*, matriks ketetanggaan dan bersisian, *graph* sebagai model matematika beserta aplikasinya.

Saran Cara Penggunaan Modul

Untuk mempelajari modul ini, hal-hal yang perlu peserta diklat lakukan adalah sebagai berikut:

1. Baca dan pelajari semua materi yang disajikan dalam modul ini,
2. Kerjakan soal-soal tes formatif dan cocokkan jawabannya dengan Kunci Jawaban yang ada.
3. Jika ada bagian yang belum dipahami, diskusikanlah dengan rekan belajar Anda. Jika masih menemui kesulitan, mintalah petunjuk instruktur/widyaiswara.
4. Untuk mengukur tingkat penguasaan materi Kerjakan soal-soal Uji Kompetensi di akhir bab dalam modul ini



KEGIATAN PEMBELAJARAN 1

Kegiatan Belajar 1 : Notasi Sigma

Pengantar

Dalam kegiatan ini akan dibahas mengenai Notasi sigma dalam bentuk deret dan sebaliknya, menggunakan sifat-sifat notasi sigma dalam pembuktian rumus.

Setelah mempelajari materi ini, peserta diharapkan dapat menerapkan dalam soal-soal kejuruan dan dalam kehidupan sehari-hari

A. Tujuan

Tujuan dari penulisan modul ini adalah:

1. Melalui penugasan dan diskusi kelompok peserta dapat menentukan notasi sigma dalam bentuk deret dan sebaliknya dengan tepat.
2. Melalui penugasan dan diskusi kelompok peserta dapat menggunakan sifat-sifat notasi sigma dalam memecahkan masalah dengan tepat.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Indikator pencapaian kompetensi yang harus dikuasai setelah mengikuti kegiatan belajar ini adalah, peserta diklat dapat:

1. Mengubah bentuk deret ke notasi sigma dan sebaliknya
2. Menggunakan sifat-sifat notasi sigma dalam memecahkan masalah(pembuktian)

C. Uraian Materi

1. Bentuk Deret dalam Notasi Sigma

Notasi sigma (Σ) pertama kali diperkenalkan oleh *Leonhard Euler* padatahun 1755. Makna dari $\sum_{k=1}^5 (3k + 2)^2$ adalah $5^2 + 8^2 + 11^2 + 14^2 + 17^2$, yang didapat dari mensubtitusikan nilai $k = 1$ sampai $k = 5$. Jadi, jelas bahwa notasi ini dapat digunakan untuk menyatakan suatu deret bilangan. Untuk mengekspansikan



bentuk notasi sigma bukan suatu masalah bagi siswa, karena hanya dengan mensubstitusikan nilai peubah, selesai sudah pekerjaan itu. Tetapi kalau soalnya diubah dari bentuk penjumlahan menjadi bentuk notasi sigma, ini yang menjadi masalah bagi siswa.

Mengapa siswa mengalami kesulitan dalam menyatakan suatu deret kedalam bentuk notasi sigma? Umumnya ini terkait dengan kesulitan dalam menentukan bentuk umum suku ke- n . Untuk mengatasi hal ini guru harus memulai dengan “pemanasan”, yaitu meminta siswa untuk menyatakan penjumlahan bilangan yang bentuk umum suku-sukunya sederhana. Misalnya guru mulai dengan meminta siswa untuk mengerjakan soal berikut.

Tentukan $3+5+7+9+11+13$ dalam bentuk notasi sigma?

Guru meminta siswa untuk mengamati pola suku-suku pada deret tersebut. Diharapkan siswa dapat melihat pola suku ke-1, suku ke-2, suku ke-3, suku ke-4, dan seterusnya seperti berikut ini.

$$\text{suku ke-1} = 3 = 2(1) + 1$$

$$\text{suku ke-2} = 5 = 2(2) + 1$$

$$\text{suku ke-3} = 7 = 2(3) + 1, \text{ dan seterusnya sehingga}$$

$$\text{suku ke-6} = 13 = 2(6) + 1$$

Dengan melihat pola suku-suku tersebut dapat disimpulkan bahwa suku-suku dalam penjumlahan itu mempunyai pola $2k + 1$.

$$\text{Dengan demikian } 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = \sum_{k=1}^6 (2k + 1)$$

Selanjutnya guru menantang siswa untuk menyatakan dalam notasi sigma bentuk yang sedikit berbeda dengan yang pertama.

Tentukan $-1+2-3+4-5+6-7+8-9+10$ dalam bentuk notasi sigma?

Guru memberikan waktu dua sampai lima menit kepada siswa untuk menyelesaikan soal tersebut. Mungkin banyak siswa yang belum dapat menyelesaikan soal ini. Kalau terjadi demikian maka guru memberikan sedikit bantuan dengan meminta siswa untuk memperhatikan “apa yang terjadi kalau -1 dipangkatkan bilangan ganjil” dan “apa yang terjadi kalau -1 dipangkatkan bilangan genap?”. Dengan memberikan bantuan itu saja diharapkan siswa dapat



meneruskan langkah-langkah berikutnya, yaitu sampai pada kesimpulan bahwa:

$$-1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + 8 - 9 + 10 = \sum_{k=1}^{10} (-1)^k k$$

Salah satu alternatif yang dapat digunakan sebagai awal berpikir untuk menyatakan penjumlahan dalam bentuk notasi sigma adalah teknik menentukan rumus barisan menggunakan konsep fungsi pada Modul Barisan dan Deret.

Contoh:

Nyatakan dalam bentuk penjumlahan $\sum_{k=1}^5 k(k+1)$

Jawab:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^5 k(k+1) &= 1(1+1) + 2(2+1) + 3(3+1) + 4(4+1) + 5(5+1) \\ &= 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 + 5 \times 6 \\ &= 2 + 6 + 12 + 20 + 30\end{aligned}$$

Contoh:

Tulislah bentuk penjumlahan berikut dalam notasi sigma.

a. $2 + 4 + 6 + 8 + 10$

b. $-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5}$

c. $ab^5 + a^2b^4 + a^3b^3 + a^4b^2$

Jawab:

$$\begin{aligned}\text{a. } 2 + 4 + 6 + 8 + 10 &= 2 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 3 + 2 \times 4 + 2 \times 5 \\ &= 2(1 + 2 + 3 + 4 + 5) \\ &= \sum_{k=1}^5 2k\end{aligned}$$



$$\text{b. } -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} = (-1)^1 \frac{1}{1+1} + (-1)^2 \frac{2}{2+1} + (-1)^3 \frac{3}{3+1} + (-1)^4 \frac{4}{4+1}$$

$$= \sum_{k=1}^4 (-1)^k \cdot \frac{k}{k+1}$$

$$\text{c. } ab^5 + a^2b^4 + a^3b^3 + a^4b^2 = a^1b^{6-1} + a^2b^{6-2} + a^3b^{6-3} + a^4b^{6-4}$$

$$= \sum_{k=1}^4 a^k b^{6-k}$$

Contoh:

Tentukan nilai-nilai notasi sigma berikut.

$$\text{a. } \sum_{p=1}^{10} p$$

$$\text{b. } \sum_{n=3}^6 2n^2$$

Jawab:

$$\begin{aligned} \text{a. } \sum_{p=1}^{10} p &= 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 10 \\ &= 55 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \sum_{n=3}^6 2n^2 &= 2(3^2) + 2(4^2) + 2(5^2) + 2(6^2) \\ &= 18 + 32 + 50 + 72 = 172 \end{aligned}$$

Contoh:

Hitunglah nilai dari $\sum_{k=1}^4 (k^2 - 4k)$

Jawab:

Ada 2 cara yang dapat digunakan untuk menyelesaikan soal di atas.

Cara 1:



$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^4 (k^2 - 4k) &= (1^2 - 4(1)) + (2^2 - 4(2)) + (3^2 - 4(3)) + (4^2 - 4(4)) \\ &= (1 - 4) + (4 - 8) + (9 - 12) + (16 - 16) \\ &= -3 - 4 - 3 + 0 = -10\end{aligned}$$

Cara 2:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^4 (k^2 - 4k) &= \sum_{k=1}^4 k^2 - \sum_{k=1}^4 4k = \sum_{k=1}^4 k^2 - 4 \sum_{k=1}^4 k \\ &= (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) - 4(1 + 2 + 3 + 4) \\ &= (1 + 4 + 9 + 16) - 4(10) \\ &= 30 - 40 = -10\end{aligned}$$

Contoh:

Dengan menggunakan sifat notasi sigma, buktikan bahwa :

$$\sum_{k=1}^n (2k - 4)^2 = 4 \sum_{k=1}^n k^2 - 16 \sum_{k=1}^n k + 16n$$

Jawab:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n (2k - 4)^2 &= \sum_{k=1}^n (4k^2 - 16k + 16) \\ &= \sum_{k=1}^n 4k^2 - \sum_{k=1}^n 16k + 16 \sum_{k=1}^n 1 \\ &= 4 \sum_{k=1}^n k^2 - 16 \sum_{k=1}^n k + 16n \dots\dots\dots(\text{terbukti})\end{aligned}$$

Contoh:

Ubahlah batas bawah sigma menjadi 1 dari notasi sigma berikut :

a. $\sum_{k=3}^5 (k + 1)$

b. $\sum_{k=0}^4 (3 - 2k)$



Jawab:

$$\text{a. } \sum_{k=3}^5 (k+1) = \sum_{k=3-2}^{5-2} (k+2) + 1 = \sum_{k=1}^3 (k+3)$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \sum_{k=0}^4 (3-2k) &= \sum_{k=0+1}^{4+1} (3-2(k-1)) \\ &= \sum_{k=1}^5 (3-2k+2) = \sum_{k=1}^5 (5-2k) \end{aligned}$$

Contoh:

Suatu deret dinyatakan dengan notasi sigma berikut :

$$\text{a. } \sum_{n=1}^{10} (2n+1)$$

$$\text{b. } \sum_{n=1}^6 2^n$$

Deret apakah itu? Kemudian, tentukan nilainya.

Jawab:

$$\begin{aligned} \text{a. } \sum_{n=1}^{10} (2n+1) &= (2(1)+1) + (2(2)+1) + (2(3)+1) + \dots + (2(10)+1) \\ &= (2+1) + (4+1) + (6+1) + \dots + (20+1) \\ &= 3 + 5 + 7 + \dots + 21 \end{aligned}$$

Tampak bahwa deret itu memiliki suku-suku yang selisihnya tetap, yaitu 2. Jadi, deret itu adalah deret aritmetika dengan suku awal $a = 3$, beda $b = 2$, dan $U_{10} = 21$.

Nilai $\sum_{n=1}^{10} (2n+1)$ sama dengan nilai jumlah n suku pertama, S_{10} . Dengan

menggunakan jumlah 10 suku pertama yang diketahui, diperoleh

$$S_n = \frac{1}{2}n(a + U_n)$$



$$= \frac{1}{2} (10)(3 + 21)$$

$$= 120$$

$$\text{Jadi, } \sum_{n=1}^{10} (2n + 1) = 120$$

$$\text{b. } \sum_{n=1}^6 2^n = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6$$

$$= 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$$

Tampak bahwa deret itu memiliki rasio tetap, yaitu $r = 2$. Jadi, deret ini termasuk

deret geometri dengan suku awal $a = 2$ dan rasio $r = 2$. Oleh karena itu $\sum_{n=1}^6 2^n = S_6$.

Karena $r = 2 > 1$, kita gunakan rumus berikut.

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$S_6 = \frac{2(2^6 - 1)}{2 - 1}$$

$$= \frac{2(64 - 1)}{1}$$

$$= 126$$

$$\text{Jadi, } \sum_{n=1}^6 2^n = 126.$$

Selanjutnya siswa diberikan soal-soal yang diurutkan mulai dari yang paling mudah. Salah satu alternatif model soalnya seperti contoh berikut ini.

Bagaimana cara membentuk notasi sigma pada barisan bilangan berikut ini?

Berikan penjelasanmu!

1. $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12$

2. $2 + 4 + 8 + 16 + 32$

3. $2 - 4 + 8 - 16 + 32 - 64$



4. $1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11 + 13 - 15 + 17$
5. $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49$
6. $1 + 3 + 9 + 27 + 81$
7. $(1 \times 2) + (2 \times 3) + (3 \times 4) + (4 \times 5) + (5 \times 6)$
8. $(1 \times 2) + (3 \times 4) + (5 \times 6) + (7 \times 8) + (9 \times 10)$
9. $a + a^2b + a^3b^2 + a^4b^3 + a^5b^4 + a^6b^5$
10. $ab^6 + a^2b^5 + a^3b^4 + a^4b^3 + a^5b^2 + a^6b$

2. Sifat-sifat Notasi Sigma dan Penggunaannya

Dalam menyelesaikan soal-soal berbentuk notasi sigma, sering digunakan sifat-sifat sebagai berikut. Untuk setiap bilangan bulat a, b dan n berlaku:

1. $\sum_{k=1}^n 1 = n$
2. $\sum_{k=a}^b c \cdot f(k) = c \cdot \sum_{k=a}^b f(k)$
3. $\sum_{k=a}^b [f(k) + g(k)] = \sum_{k=a}^b f(k) + \sum_{k=a}^b g(k)$
4. $\sum_{k=1}^{m-1} f(k) + \sum_{k=m}^n f(k) = \sum_{k=1}^n f(k)$
5. $\sum_{k=m}^n f(k) = \sum_{k=m+p}^{n+p} f(k-p)$

Masalah yang sering dijumpai adalah ketika membuktikan atau menghitung nilai suatu bentuk notasi sigma, yaitu ketika harus menggunakan sifat-sifat notasi sigma, misalnya bentuk soal notasi sigma seperti soal-soal berikut ini:

1. Buktikan bahwa: $\sum_{k=1}^n (k^2 - (k-1)^2) = n^2$

Bukti:

$$\begin{aligned}\text{Ruas kiri: } \sum_{k=1}^n (k^2 - (k-1)^2) &= \sum_{k=1}^n (k^2 - (k^2 - 2k + 1)) \\ &= \sum_{k=1}^n 2k - 1 = 2\sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1\end{aligned}$$

$$\text{Menggunakan sifat nomor 2 dan 1:} \quad = 2\left(\frac{n}{2}(n+1) - n\right)$$



$$= n^2 + n - n$$

$$= n^2$$

= ruas kanan (terbukti)

2. Bagaimana cara menentukan nilai $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ dengan dua cara?

Penyelesaian

Cara 1:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k(k+1)} \right) &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

Cara 2:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3+1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{6+2+1}{12} = \frac{3}{4}$$

$$S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} = \frac{30+10+5+3}{60} = \frac{4}{5} \text{ dst}$$

$$S_n = \frac{n}{n+1}$$

$$\text{Jadi } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \text{ adalah } \frac{n}{n+1}$$



Penggunaan notasi sigma sangat erat kaitannya dengan penggunaan barisan dan deret, baik aritmetika maupun geometri.

Di bidang bisnis dan ekonomi, teori atau prinsip-prinsip deret sering diterapkan dalam kasus-kasus yang menyangkut perkembangan dan pertumbuhan. Apabila perkembangan atau pertumbuhan suatu gejala tertentu berpola seperti perubahan nilai-nilai suku sebuah deret, baik deret hitung ataupun deret ukur, maka teori deret yang bersangkutan penad (relevant) diterapkan untuk menganalisisnya.

Model perkembangan usaha merupakan penerapan teori Baris dan Deret. Perkembangan usaha yang dimaksud adalah sejauh usaha-usaha yang pertumbuhannya konstan dari waktu ke waktu mengikuti perubahan baris hitung. Jika perkembangan variabel-variabel tertentu dalam kegiatan usaha misalnya produksi, biaya, pendapatan, penggunaan tenaga kerja, atau penanaman modal yang berpola seperti deret hitung, maka prinsip-prinsip deret hitung dapat digunakan untuk menganalisis perkembangan variable tersebut. Berpola seperti deret hitung maksudnya di sini ialah bahwa variable yang bersangkutan bertambah secara konstan dari satu periode ke periode berikutnya.

A. Aktivitas Pembelajaran

1. Pengantar

Dalam kegiatan ini Anda akan melakukan serangkaian aktivitas atau kegiatan untuk mencapai kompetensi profesional berkaitan dengan materi pokok Notasi Sigma dengan sub materi merubah bentuk deret ke notasi sigma dan sebaliknya, menentukan nilai dari notasi sigma dan pembuktian notasi sigma dengan menggunakan sifat-sifat notasi sigma. Kegiatan-kegiatan tersebut akan terbagi ke dalam beberapa aktivitas atau sub materi pokok dan berhubungan dengan lembar kerja yang harus dilengkapi atau dilaksanakan, baik secara individu maupun kelompok.



2. Aktivitas 0: Identifikasi bahan ajar

Pelajari dengan seksama materi pokok notasi sigma dalam modul ini kemudian diskusikan dengan rekan guru dan presentasikan.

Ada berapa aktivitas yang harus anda ikuti dalam mempelajari modul ini. Jawablah pertanyaan di atas dengan menggunakan lembar kerja 2.0.1 dan 2.0.2.

3. Aktivitas 1: Bentuk Deret dan Notasi sigma

Dalam aktivitas ini anda akan mempelajari tentang mengubah bentuk Deret ke notasi sigma dan sebaliknya dan menentukan nilai dari suatu notasi sigma. Jawablah pertanyaan di bawah ini dalam lembar kerja 2.1.1 dan 2.1.2, . Jika anda kesulitan menjawab disarankan untuk membaca materi tentang notasi sigma. Hasilnya dipresentasikan di depan kelas dengan penuh percaya diri

LK 2.1.1:

Bagaimana cara menyatakan barisan bilangan berikut ini dalam notasi sigma? Berikan penjelasan.

a. 4, 7, 10, 13, ..., 31.

b. $-4 + 5 - 6 + \dots + 13$

c. 2, 6, 10, ..., 38.

d. Bentuk penjumlahan:

$$\frac{5}{3 \cdot 4 \cdot 2} + \frac{6}{4 \cdot 5 \cdot 4} + \frac{7}{5 \cdot 6 \cdot 8} \dots + \frac{2005}{2003 \cdot 2004 \cdot 2^{2003}}$$

LK 2.1.2 :

Jelaskan cara menghitung nilai dari notasi sigma berikut ini!

a. $\sum_{k=1}^8 3k - 1$

b. $\sum_{k=1}^{10} (6k^2 + 4k)$



4. Aktivitas 2: Pembuktian dengan sifat-sifat notasi sigma

Dalam aktivitas ini anda akan mempelajari tentang membuktikan notasi sigma dengan sifat-sifat notasi sigma. Jawablah pertanyaan di bawah ini dalam lembar kerja 2.2. Jika anda kesulitan menjawab disarankan untuk membaca materi tentang notasi sigma. Hasilnya dipresentasikan di depan kelas dengan penuh percaya diri.

LK 2.2:

Buktikan : a. $\sum_{k=1}^n (2k + 1) = n^2 + 2n$

$$\text{b. } \sum_{k=1}^8 k^2 = \sum_{k=1}^4 k^2 + 3 \sum_{k=1}^4 k + 84$$

5. Aktivitas 3 : Penyusunan instrumen penilaian

Dalam kegiatan ini Anda akan berlatih untuk menyusun instrumen penilaian pada materi Sigma yang sedang dipelajari, dengan mengacu pada panduan penyusunan dan penulisan soal dari PUSPENDIK, diskusikan dengan sesama peserta. Kerjakan dengan rasa tanggung jawab, cermat dan percaya diri.

LK2.3:

1. Buatlah kisi kisi soal mengenai materi bentuk deret dan Notasi sigma, mengubah bentuk Deret ke notasi sigma dan sebaliknya dan menentukan nilai dari suatu notasi sigma.
2. Buatlah 15 soal yang terdiri dari 10 soal pilihan ganda dan 5 uraian sesuai kisi-kisi yang sudah dibuat

Rangkuman

1. Untuk mempersingkat bentuk penjumlahan yang sifatnya mempunyai sifat keteraturan digunakan notasi sigma yang dilambangkan dengan " $\sum_{i=a}^b x_i$ " dimana i sebagai indeks dengan batas bawah a dan batas atas b sedangkan x_i adalag



rumus sigma sesuai dengan indeks yang digunakan. Indeks menggunakan huruf kecil.

2. $\sum_{i=a}^b x_i$ dibaca “sigma dari x_i untuk harga i dari a sampai b ”.
3. Jika batas bawah diubah maka otomatis rumus sigmanyapun akan berubah. Jadi rumus sigma sifatnya tidak unik.

$$\sum_{n=0}^k x_n = \sum_{n=c}^{k+c} x_{n-c}$$

4. Dari pembahasan bagaimana mengubah bentuk penjumlahan ke dalam bentuk notasi sigma, disarankan untuk:
 1. menentukan apakah deret itu berbentuk deret aritmetika atau geometri atau apakah deret itu berbentuk deret bilangan berpangkat, atau deret fungsi kuadrat, atau pangkat tiga,
 2. menentukan batasan bentuk notasi sigma dengan teliti, supaya diperoleh batas bawah dan batas atas yang tepat.

Tes Formatif

1. Tuliskan penjumlahan berikut ini dalam notasi sigma secara mandiri dan jujur. Setelah Anda mencobanya, tentukan bantuan apa yang diperlukan siswa dalam menyelesaikan soal-soal ini.

- a. $6 + 12 + 24 + 48 + 96$
- b. $4 + 10 + 28 + 82 + 244$
- c. $3/7 + 4/8 + 5/9 + 6/10 + \dots + 23/27$
- d. $4 + 13 + 28 + 49 \dots + 301$
- e. Bentuk penjumlahan:

$$\frac{-3}{3} + \frac{-0}{4} + \frac{3}{5} + \frac{6}{6} + \frac{9}{7} + \dots + \frac{3(n-2)}{n+2}$$

- f. Bentuk penjumlahan:

$$\frac{3}{1.2.2} + \frac{4}{2.3.4} + \frac{5}{3.4.8} + \frac{6}{4.5.16} + \dots + \frac{2005}{2003.2004.2^{2003}}$$



g. $ab^5 + a^2b^4 + a^3b^3 + a^4b^2$

2. Gunakan sifat-sifat notasi sigma untuk menyelesaikan soal berikut ini.

a. Jika diketahui $\sum_{i=1}^{10} i^2 = 385$ dan $\sum_{i=1}^{10} 2i = 110$, tentukan nilai $\sum_{i=4}^{10} (i+1)^2$

b. Buktikan bahwa: $\sum_{k=1}^n (k^3 - (k-1)^3) = n^3$

c. Hitunglah $\sum_{k=1}^{20} k \cdot (k-2)$

d. Hitunglah $\sum_{k=1}^{10} k \cdot (k+1) \cdot (k+2)$

e. Hitunglah $\sum_{k=1}^n k \cdot (k+1)$

f. Hitunglah nilai $\sum_{k=1}^{2003} \frac{k+2}{k(k+1)2^k}$

3. Buktikan persamaan notasi sigma berikut ini! Apa kesimpulan yang dapat kamu peroleh?

$$\sum_{k=1}^{10} k^2 = \sum_{k=1}^6 k^2 + 3 \cdot \sum_{k=1}^7 k + 210$$

4. Bagaimana cara menyatakan bentuk penjumlahan $21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2$ dalam bentuk notasi sigma dengan batas bawah 1? Tuliskan pendapatmu!



Kunci Jawaban

1. a. $\sum_{k=1}^5 3 \cdot 2^k$ (perhatikan bahwa ini adalah deret geometri)
 b. $\sum_{k=1}^5 3^k + 1$ (bandingkan dengan deret pangkat dari tiga)
 c. $\sum_{k=1}^{21} \frac{(n+2)}{(n+6)}$ (perhatikan pembilang dan penyebut membentuk barisan aritmetika)
 a. $\sum_{k=1}^{10} 3k^2 + 1$ (perhatikan bahwa suku-suku deret membentuk beda yang tetap pada tingkat ke-2)
 b. $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{3(k-2)}{k+2}$ (perhatikan pembilang dan penyebut membentuk barisan aritmetika)
 c. $\sum_{k=1}^{2003} \frac{k+2}{k(k+1)2^k}$ (perhatikan pembilang membentuk barisan aritmetika, penyebut membentuk perkalian barisan aritmetika dan bentuk pangkat dari 2)
 d. $ab^5 + a^2b^4 + a^3b^3 + a^4b^2 = a^1b^{6-1} + a^2b^{6-2} + a^3b^{6-3} + a^4b^{6-4}$

$$= \sum_{k=1}^4 a^k b^{6-k}$$
2. a. 476
 b. Ikuti langkah-langkah seperti contoh 1
 c. 2450
 d. 4290
 e. $\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$
 f. $1 - \frac{1}{(2^{2003} \cdot 2004)} 1 - [1/(2^{2003} \times 2004)]$
3. Bukti:
 Gunakan rumus : $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ dan $\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$
 Ruas kiri : $\sum_{k=1}^{10} k^2 = \frac{1}{6} \cdot 10 \cdot (11) \cdot (21) = 385$



$$\text{Ruas kanan : } \sum_{k=1}^6 k^2 + 3 \sum_{k=1}^7 k + 210 = \frac{1}{6} \cdot 6(7)(13) + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 7(8) + 210 = 385$$

Karena ruas kiri = ruas kanan, jadi terbukti bahwa $\sum_{k=1}^{10} k^2 = \sum_{k=1}^6 k^2 + 3 \sum_{k=1}^7 k + 210$

4. Penyelesaian:

$$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = \sum_{k=21}^{24} k^2 = \sum_{k=1}^4 (k+20)^2$$



KEGIATAN PEMBELAJARAN 2

Kegiatan Belajar 2 : Himpunan

Pengantar

Dalam kegiatan ini akan dibahas mengenai sejarah Himpunan, konsep dasar himpunan dan operasi himpunan dan menyelesaikan masalah sehari-hari. Setelah mempelajari materi ini, peserta diharapkan dapat menerapkan dalam soal-soal kejuruan dan dalam kehidupan sehari-hari dengan tepat.

A. Tujuan

Tujuan dari penulisan modul ini adalah:

1. Melalui penugasan dan diskusi kelompok peserta diklat dapat mengetahui sejarah himpunan.
2. Melalui penugasan dan diskusi kelompok peserta diklat dapat memahami konsep-konsep dasar himpunan (definisi, himpunan bagian, himpunan kuasa, kardinalitas) dengan tepat.
3. Melalui penugasan dan diskusi kelompok peserta diklat dapat memahami konsep operasi himpunan dan yang berkaitan dengan operasi himpunan (prinsip inklusi-eksklusi, dualitas, pembuktian kalimat himpunan) dengan tepat.
4. Melalui penugasan dan diskusi kelompok peserta diklat dapat menggunakan konsep-konsep himpunan dalam memecahkan masalah sehari-hari dengan tepat.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Indikator pencapaian kompetensi yang harus dikuasai setelah mengikuti kegiatan belajar ini adalah, peserta diklat dapat:

1. Mengetahui sejarah himpunan
2. Memahami konsep-konsep dasar himpunan (definisi, keanggotaan, kesamaan, himpunan bagian, himpunan kuasa, kardinalitas).



3. Memahami konsep operasi himpunan dan yang berkaitan dengan operasi himpunan (prinsip inklusi-eksklusi, dualitas, pembuktian kalimat himpunan).
4. Menggunakan konsep-konsep himpunan dalam memecahkan masalah sehari-hari.

C. Uraian Materi

Sejarah Perkembangan Teori Himpunan

Teori himpunan, yang baru diciptakan pada akhir abad ke-19, sekarang merupakan bagian yang tersebar dalam pendidikan matematika yang mulai diperkenalkan bahkan sejak tingkat sekolah dasar. Teori ini merupakan bahasa untuk menjelaskan matematika modern. Teori himpunan dapat dianggap sebagai dasar yang membangun hampir semua aspek dari matematika dan merupakan sumber dari mana semua matematika diturunkan.

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918) dikenal sebagai penemu teori himpunan. Cantor lahir di St. Petersburg, Rusia pada 3 Maret 1845 sebagai anak pertama dari pasangan Georg Woldemar Cantor dan Maria Bohm. Cantor mengenyam pendidikan dasarnya di rumah melalui guru privat. Di usia 11 tahun, ia bersama keluarganya pindah ke Jerman dan Cantor melanjutkan pendidikannya di Gymnasium lalu pindah ke Frankfurt dan Darmstadt. Di tahun 1860, Cantor lulus dari Realschule di Darmstadt dengan hasil yang luar biasa dan menunjukkan bahwa ia memiliki bakat yang hebat dalam bidang matematika, khususnya trigonometri.

Keinginan Cantor untuk mempelajari matematika di universitas mendapat hambatan dari ayahnya yang menginginkan ia menjadi seorang insinyur. Karena keteguhannya, di tahun 1862 Cantor berhasil mendapat restu ayahnya untuk mempelajari matematika setelah sebelumnya ia belajar teknik di Horere Gewerbeschule dan Polytechnic of Zurich. Cantor mempelajari matematika di Zurich. Akan tetapi, karena kematian ayahnya pada Juni 1863, ia pindah ke University of Berlin. Di tahun 1867, ia berhasil mempertahankan disertasi mengenai teori bilangan "*De Aequationibus Secundi Gradus Indeterminatis*".

Sampai akhir abad ke-19, ada beberapa referensi mengenai himpunan dalam literatur-literatur matematika. Karya George Cantor yang paling berpengaruh pada



masa itu yang diterbitkan oleh Crelle's Jurnal pada tahun 1874. Dia mengenalkan konsep himpunan tak berhingga yang lengkap, sebuah inovasi yang membuat dia diakui sebagai penemu teori himpunan. Georg Cantor meninggal pada tanggal 6 Januari 1918 di Halle.

Matematikawan telah menggunakan himpunan sejak awal subjek. Misalnya, ahli matematika Yunani telah mendefinisikan lingkaran sebagai himpunan poin pada jarak r tetap dari titik tetap P . Namun, konsep 'himpunan tak terhingga' dan himpunan berhingga menghindari ahli matematika dan filsuf selama berabad-abad. Misalnya, pemikiran Hindu dipahami tak terbatas dalam Ishavasy teks kitab suci-opanishad mereka sebagai berikut: "Keseluruhan ada di sana. Keseluruhan berada di sini. Dari lubang imanes keseluruhan. Menyingkirkan keseluruhan dari keseluruhan, apa tersisa masih satu Utuh". Pythagoras (585-500 SM), seorang matematikawan Yunani, berhubungan baik dan jahat dengan terbatas dan tidak terbatas, masing-masing. Aristoteles (384-322 SM) mengatakan, "Tak terbatas tidak sempurna, belum selesai dan karena itu, tak terpikirkan, itu tak berbentuk dan bingung." Kaisar Romawi dan filsuf Marcus Aqarchus (121-180 M) mengatakan tak terhingga adalah sebuah teluk yg tak dpt diduga, di mana segala sesuatu lenyap "filsuf. Inggris Thomas Hobbes (1588-1679) berkata, "Ketika kita mengatakan sesuatu adalah tak terbatas, kami hanya menandakan bahwa kita tidak bisa.

Hamil berakhir dan batas-batas hal yang bernama".

Ahli matematika bekerja, serta jalan, jarang berkaitan dengan pertanyaan yang tidak biasa yaitu : apa itu angka? Namun upaya untuk menjawab pertanyaan ini justru telah mendorong banyak pekerjaan oleh matematikawan dan filsuf di dasar matematika selama seratus tahun terakhir. Karakterisasi bilangan bulat, bilangan rasional dan bilangan real telah menjadi masalah klasik pusat untuk penelitian dari Weierstrass, Dedekind, Kronecker, Frege, Peano, Russel, Whitehead, Brouwer, dan lain-lain.

Peneliti dari Georg Cantor sekitar 1870 dalam teori dengan rangkaian tanpa batas dan topik terkait analisis memberikan arah baru bagi perkembangan teori himpunan. Cantor, yang biasanya dianggap sebagai pendiri teori himpunan sebagai suatu disiplin matematika, dipimpin oleh karyanya menjadi pertimbangan himpunan tak terbatas atau kelas karakter sewenang-wenang.



Namun, hasil Cantor tidak segera diterima oleh orang-orang sezamannya. Juga, ditemukan bahwa definisi tentang menetapkan mengarah ke kontradiksi dan paradoks logis. Yang paling terkenal di kalangan ini diberikan pada 1918 oleh Bertrand Russell (1872-1970), sekarang dikenal sebagai's paradoks Russell.

Dalam upaya untuk menyelesaikan paradoks ini, reaksi pertama matematikawan adalah untuk 'axiomatize' Teori himpunan intuitif's Cantor. Axiomatization berarti sebagai berikut: dimulai dengan satu himpunan pernyataan jelas disebut aksioma, kebenaran yang diasumsikan, seseorang dapat menyimpulkan semua sisa proposisi teori dari aksioma menggunakan aksioma inferensi logis. Russell dan Alfred North Whitehead (1861-1974) pada tahun 1903 mengusulkan teori aksiomatik himpunan dalam tiga-volume kerja mereka yang disebut Principia Matematikawan merasa canggung untuk digunakan. Sebuah Teori himpunan aksiomatik yang dapat dikerjakan dan logistik sepenuhnya diberikan pada tahun 1908 oleh Ernst Zermello (1871-1953). wa ini meningkat pada tahun 1921 oleh Fraenkel A. Ibrahim (1891-1965) dan T. Skolem (1887-1963) dan sekarang dikenal sebagai 'Zermello-Frankel (ZF) teori aksiomatik-himpunan.

Matematikawan yang berkecimpung di dunia himpunan yaitu Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918), Bolzano, Russell dan Alfred North Whitehead (1861-1974), Ernst Zermello (1871-1953), Fraenkel A. Ibrahim (1891-1965) dan T. Skolem (1887-1963).

Himpunan adalah konsep dasar dari semua cabang matematika. *George Cantor* dianggap sebagai bapak teori himpunan. Himpunan adalah sekumpulan objek yang mempunyai syarat tertentu dan jelas. Objek yang dimaksud dapat berupa bilangan, manusia, hewan, tumbuhan, negara dan sebagainya. Objek ini selanjutnya dinamakan anggota atau elemen dari himpunan itu. Syarat tertentu dan jelas dalam menentukan anggota suatu himpunan ini sangat penting karena untuk membedakan mana yang menjadi anggota himpunan dan mana yang bukan merupakan anggota himpunan. Inilah yang kemudian dinamakan himpunan yang terdefinisi dengan baik (*well-defined set*).

Dalam kehidupan nyata, banyak sekali masalah yang terkait dengan data (objek) yang dikumpulkan berdasarkan kriteria tertentu. Kumpulan data (objek) inilah yang selanjutnya didefinisikan sebagai himpunan. Pada kegiatan belajar ini akan dibahas



tentang definisi dan keanggotaan suatu himpunan, penyajian himpunan, kardinalitas, himpunan kuasa, kesamaan dan himpunan bagian, operasi himpunan dari beberapa jenis himpunan, sifat-sifat himpunan, prinsip dualitas, dan pembuktian suatu kalimat atau ekspresi himpunan.

1. Definisi Himpunan

Himpunan (*set*) adalah kumpulan objek-objek yang berbeda (Liu, 1986), terdefinisi secara jelas (*crisp*) dan tidak terurut (*unordered*). Jika suatu himpunan mempunyai objek yang tidak terdefinisi secara jelas, maka dinamakan dengan *fuzzyset*. Istilah *fuzzy* (kabur, tidak jelas) diambil karena keanggotaan himpunannya tidak jelas atau samar-samar. Keanggotaannya menggunakan derajat keanggotaan (*membership function*).

Himpunan yang akan dibahas dan dibicarakan pada modul ini adalah himpunan yang *crisp*, bukan yang berkategori *fuzzy*.

Perbedaan dengan Fuzzy

Berpikir dengan crisp set menjadikan segala sesuatunya lebih sederhana, karena sesuatu bisa merupakan anggota dari suatu crisp set atau tidak. Crisp set dapat digunakan untuk merepresentasikan gambaran pengertian hitam dan putih. Seringkali juga, saat sesuatu itu merupakan anggota dari sebuah crisp set maka ia kemudian (pada waktu yang sama) bukan merupakan anggota dari crisp set manapun. Kembali hal ini menyederhanakan penggunaan logika dengan proses pemikiran semacam ini. Konstruksi linguistik yang menggambarkan jenis pemikiran ini dapat benar – benar berguna, terutama saat kategori crisp digunakan. Pada himpunan tegas (*crisp*), nilai keanggotaan suatu item x dalam suatu himpunan A , yang sering ditulis dengan $\mu_A[x]$, memiliki 2 kemungkinan, yaitu Satu (1), yang berarti bahwa suatu item menjadi anggota dalam suatu himpunan, atau Nol (0), yang berarti bahwa suatu item tidak menjadi anggota dalam suatu himpunan.

Orang yang belum pernah mengenal logika fuzzy pasti akan mengira bahwa logika fuzzy adalah sesuatu yang amat rumit dan tidak menyenangkan. Namun, sekali



seseorang mulai mengenalnya, ia pasti akan sangat tertarik dan akan menjadi pendatang baru untuk ikut serta mempelajari logika fuzzy. Logika fuzzy dikatakan sebagai logika baru yang lama, sebab ilmu tentang logika fuzzy modern dan metodis baru ditemukan beberapa tahun yang lalu, padahal sebenarnya konsep tentang logika fuzzy itu sendiri sudah ada pada diri kita sejak lama.

Logika Fuzzy pertama kali diperkenalkan oleh Prof. Lotfi Zadeh pada tahun 1965. Dia adalah orang Iran yang menjadi guru besar di University of California at Berkeley dalam papernya yang berjudul "Fuzzy Set". Dalam paper tersebut dia memaparkan ide dasar fuzzy set yang meliputi inclusion, union, intersection, complement, relation dan convexity. Lotfi Zadeh mengatakan penerapan integrasi Logika Fuzzy kedalam sistem informasi dan rekayasa proses akan menghasilkan sistem kontrol, alat-alat rumah tangga, dan sistem pengambil keputusan yang lebih fleksibel, mantap, dan canggih dibandingkan dengan sistem konvensional. Logika Fuzzy merupakan perkembangan dari logika boolean yang hanya mengenal nilai 0 atau 1, benar atau salah, hitam atau putih. Logika Fuzzy memiliki karakteristik dan keunggulan dalam menangani permasalahan yang bersifat ketidakpastian dan kebenaran parsial. Logika Fuzzy memungkinkan nilai keanggotaan antara 0 dan 1, tingkat keabuan dan juga hitam dan putih, dan dalam bentuk linguistik, konsep tidak pasti seperti "sedikit", "lumayan", dan "sangat". Hal ini sangat berpengaruh dalam penyelesaian masalah di dunia nyata yang biasanya tidak bisa dilihat sebagai hitam atau putih. Kenyataannya terdapat banyak hal yang bernilai abu-abu dan jika diperhatikan akan membantu kita untuk membuat keputusan yang secara intuitif tampak lebih adil.

Logika fuzzy adalah suatu cara yang tepat untuk memetakan suatu ruang input ke dalam suatu ruang output. Sebagai contoh:

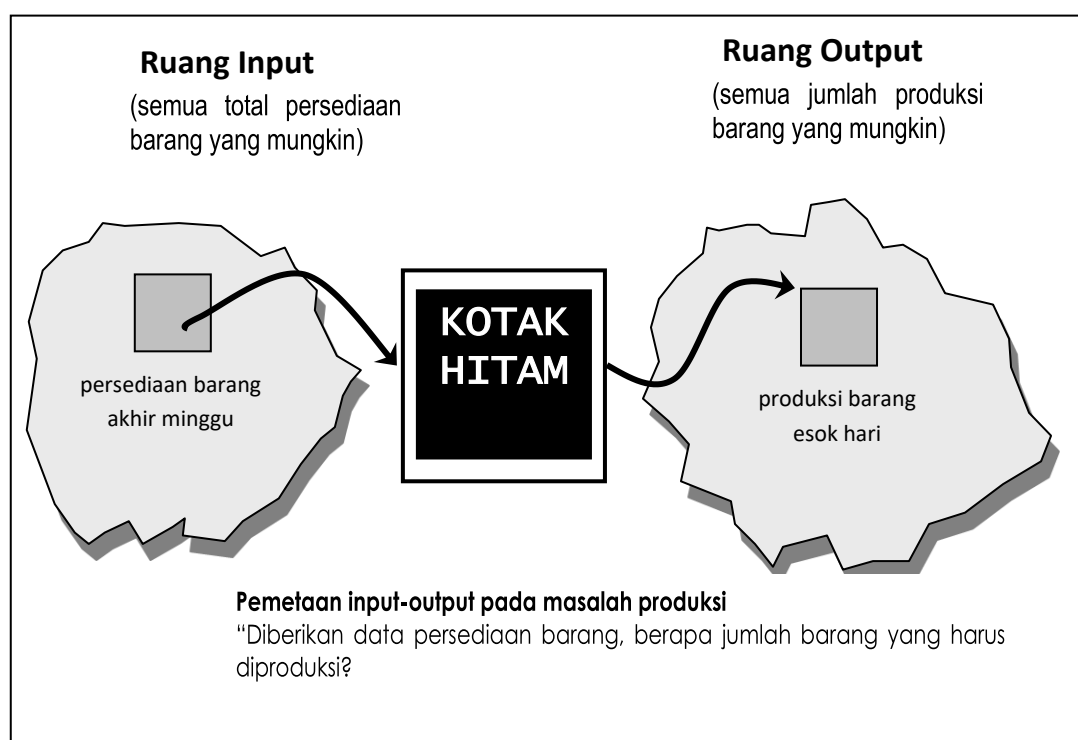
1. Manajer pergudangan mengatakan pada manajer produksi seberapa banyak persediaan barang pada akhir minggu ini, kemudian manajer produksi akan menetapkan jumlah barang yang harus diproduksi esok hari.
2. Pelayan restoran memberikan pelayanan terhadap tamu, kemudian tamu akan memberikan tip yang sesuai atas baik tidaknya pelayan yang diberikan;



3. Anda mengatakan pada saya seberapa sejuk ruangan yang anda inginkan, saya akan mengatur putaran kipas yang ada pada ruangan ini.
 4. Penumpang taksi berkata pada sopir taksi seberapa cepat laju kendaraan yang diinginkan, sopir taksi akan mengatur pijakan gas taksinya.
- Salah satu contoh pemetaan suatu input-output dalam bentuk grafis seperti terlihat pada Gambar 2.3.1

Gambar 2.3.1

Contoh pemetaan input-output.



Antara input dan output terdapat satu kotak hitam yang harus memetakan input ke output yang sesuai.

Alasan Digunakannya Fuzzy

Ada beberapa alasan mengapa orang menggunakan logika fuzzy, antara lain:

1. Konsep logika fuzzy mudah dimengerti. Konsep matematis yang mendasari penalaran fuzzy sangat sederhana dan mudah dimengerti.
2. Logika fuzzy sangat fleksibel.



3. Logika fuzzy memiliki toleransi terhadap data-data yang tidak tepat.
4. Logika fuzzy mampu memodelkan fungsi-fungsi nonlinear yang sangat kompleks.
5. Logika fuzzy dapat membangun dan mengaplikasikan pengalaman-pengalaman para pakar secara langsung tanpa harus melalui proses pelatihan.
6. Logika fuzzy dapat bekerjasama dengan teknik-teknik kendali secara konvensional.
7. Logika fuzzy didasarkan pada bahasa alami.

Aplikasi Fuzzy

Beberapa aplikasi logika fuzzy, antara lain:

1. Pada tahun 1990 pertama kali dibuat mesin cuci dengan logika fuzzy di Jepang(Matsushita Electric Industrial Company). Sistem fuzzy digunakan untuk menentukan putaran yang tepat secara otomatis berdasarkan jenis dan banyaknya kotoran serta jumlah yang akan di cuci.
Input yang digunakan adalah : seberapa kotor, jenis kotoran dan banyaknya yang di cuci. Mesin ini menggunakan sensor optik, mengeluarkan cahaya ke air dan mengukur bagaimana cahaya tersebut sampai ke ujung lainnya. Makin kotor, maka sinar yang sampai makin redup. Disamping itu, sistem juga dapat menentukan jenis kotoran(daki atau minyak).
2. Transmisi otomatis pada mobil Nissan telah menggunakan sistem fuzzy pada transmisi otomatis dan mampu menghemat bensin 12% – 17%
3. Kereta bawah tanah Sendai mengontrol pemberhentian otomatis pada area tertentu.
4. Ilmu kedokteran dan biologi, seperti sistem diagnosis yang didasarkan pada logika fuzzy, penelitian kanker, manipulasi peralatan prostetik yang didasarkan pada logika fuzzy, dll.
5. Manajemen dan pengambilan keputusan, seperti manajemen basis data, tata letak pabrik, sistem pembuat keputusan di militer yang dan pembuatan games yang semuanya didasarkan pada logika fuzzy, dll.



6. Ekonomi, seperti pemodelan fuzzy pada sistem pemasaran yang kompleks, dll.
7. Klasifikasi dan pencocokan pola.
8. Psikologi, seperti logika fuzzy untuk menganalisis kelakuan masyarakat, pencegahan dan investigasi kriminal, dll.
9. Ilmu-ilmu sosial, terutama untuk pemodelan informasi yang tidak pasti.
10. Ilmu lingkungan, seperti kendali kualitas air, prediksi cuaca, dll.
11. Teknik, seperti perancangan jaringan komputer, prediksi adanya gempa bumi, dll.
12. Riset operasi, seperti penjadwalan dan pemodelan, pengalokasian, dll.
13. Peningkatan kepercayaan, seperti kegagalan diagnosis, inspeksi dan monitoring produksi.

Keanggotaan Himpunan Fuzzy

Pada himpunan tegas (*crisp*), nilai keanggotaan suatu item x dalam suatu himpunan A , yang sering ditulis dengan $\mu_A[x]$, memiliki 2 kemungkinan, yaitu:

- ☛ satu (1), yang berarti bahwa suatu item menjadi anggota dalam suatu himpunan, atau
- ☛ nol (0), yang berarti bahwa suatu item tidak menjadi anggota dalam suatu himpunan.

Contoh 7.1:

Jika diketahui:

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ adalah semesta pembicaraan.

$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{3, 4, 5\}$

bisa dikatakan bahwa:

- ☉ Nilai keanggotaan 2 pada himpunan A , $\mu_A[2]=1$, karena $2 \in A$.
- ☉ Nilai keanggotaan 3 pada himpunan A , $\mu_A[3]=1$, karena $3 \in A$.
- ☉ Nilai keanggotaan 4 pada himpunan A , $\mu_A[4]=0$, karena $4 \notin A$.
- ☉ Nilai keanggotaan 2 pada himpunan B , $\mu_B[2]=0$, karena $2 \notin B$.



Ⓐ Nilai keanggotaan 3 pada himpunan B, $\mu_B[3]=1$, karena $3 \in B$.

Contoh 7.2:

Misalkan variabel umur dibagi menjadi 3 kategori, yaitu:

MUDA: umur < 35 tahun

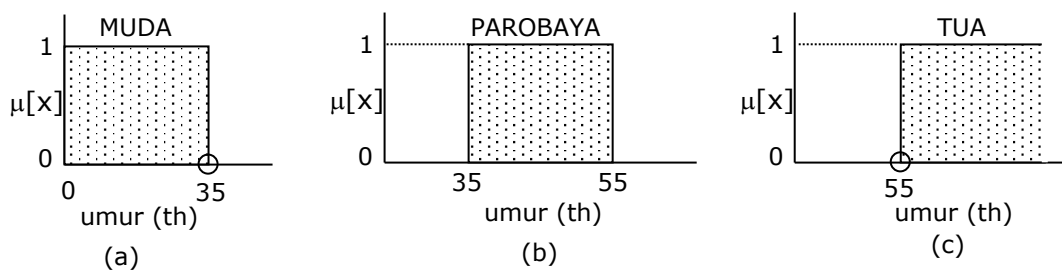
PAROBAYA: umur 35 s.d. umur 55 tahun

TUA: umur > 55 tahun

Nilai keanggotaan secara grafis, himpunan MUDA, PAROBAYA dan TUA ini dapat dilihat pada Gambar 2.3.2.

Gambar 2.3.2

Himpunan: MUDA, PAROBAYA, dan TUA.



Pada Gambar 7.2, dapat dilihat bahwa:

- ❖ apabila seseorang berusia 34 tahun, maka ia dikatakan MUDA ($\mu_{MUDA}[34] = 1$);
- ❖ apabila seseorang berusia 35 tahun, maka ia dikatakan TIDAK MUDA ($\mu_{MUDA}[35] = 0$);
- ❖ apabila seseorang berusia 35 tahun kurang 1 hari, maka ia dikatakan TIDAK MUDA ($\mu_{MUDA}[35 \text{ th} - 1 \text{ hr}] = 0$);
- ❖ apabila seseorang berusia 35 tahun, maka ia dikatakan PAROBAYA ($\mu_{PAROBAYA}[35] = 1$);
- ❖ apabila seseorang berusia 34 tahun, maka ia dikatakan TIDAK PAROBAYA ($\mu_{PAROBAYA}[34] = 0$);
- ❖ apabila seseorang berusia 35 tahun, maka ia dikatakan PAROBAYA ($\mu_{PAROBAYA}[35] = 1$);



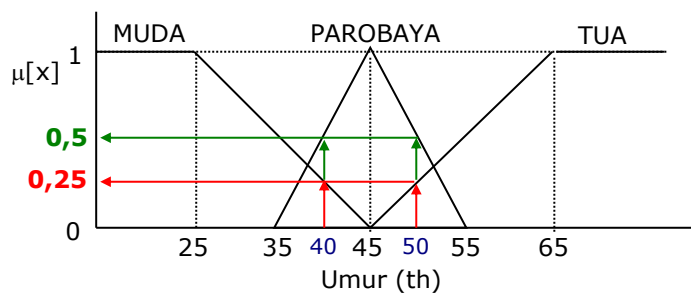
- ❖ apabila seseorang berusia 35 tahun kurang 1 hari, maka ia dikatakan TIDAK PAROBAYA ($\mu_{\text{PAROBAYA}}[35 \text{ th} - 1 \text{ hr}] = 0$);

Dari sini bisa dikatakan bahwa pemakaian himpunan *crisp* untuk menyatakan umur sangat tidak adil, adanya perubahan kecil saja pada suatu nilai mengakibatkan perbedaan kategori yang cukup signifikan.

Himpunan fuzzy digunakan untuk mengantisipasi hal tersebut. Seseorang dapat masuk dalam 2 himpunan yang berbeda, MUDA dan PAROBAYA, PAROBAYA dan TUA, dsb. Seberapa besar eksistensinya dalam himpunan tersebut dapat dilihat pada nilai keanggotaannya. Gambar 2.3.3 menunjukkan himpunan fuzzy untuk variabel umur.

Gambar 2.3.3

Himpunan fuzzy untuk variabel Umur.



Pada Gambar 2.3.3, dapat dilihat bahwa:

- ❖ Seseorang yang berumur 40 tahun, termasuk dalam himpunan MUDA dengan $\mu_{\text{MUDA}}[40] = 0,25$; namun dia juga termasuk dalam himpunan PAROBAYA dengan $\mu_{\text{PAROBAYA}}[40] = 0,5$. Seseorang yang berumur 50 tahun, termasuk dalam himpunan MUDA dengan $\mu_{\text{TUA}}[50] = 0,25$; namun dia juga termasuk dalam himpunan PAROBAYA dengan $\mu_{\text{PAROBAYA}}[50] = 0,5$.

Kalau pada himpunan *crisp*, nilai keanggotaan hanya ada 2 kemungkinan, yaitu 0 atau 1, pada himpunan fuzzy nilai keanggotaan terletak pada rentang 0 sampai 1. Apabila x memiliki nilai keanggotaan fuzzy $\mu_A[x] = 0$ berarti x tidak menjadi anggota himpunan A , demikian pula apabila x memiliki nilai keanggotaan fuzzy $\mu_A[x] = 1$ berarti x menjadi anggota penuh pada himpunan A .



Terkadang kemiripan antara keanggotaan fuzzy dengan probabilitas menimbulkan kerancuan. Keduanya memiliki nilai pada interval $[0,1]$, namun interpretasi nilainya sangat berbeda antara kedua kasus tersebut. Keanggotaan fuzzy memberikan suatu ukuran terhadap pendapat atau keputusan, sedangkan probabilitas mengindikasikan proporsi terhadap keseringan suatu hasil bernilai benar dalam jangka panjang. Misalnya, jika nilai keanggotaan suatu himpunan fuzzy MUDA adalah 0,9; maka tidak perlu dipermasalahkan berapa seringnya nilai itu diulang secara individual untuk mengharapkan suatu hasil yang hampir pasti muda. Di lain pihak, nilai probabilitas 0,9 muda berarti 10% dari himpunan tersebut diharapkan tidak muda

Himpunan fuzzy memiliki 2 atribut, yaitu:

- a. Linguistik, yaitu penamaan suatu grup yang mewakili suatu keadaan atau kondisi tertentu dengan menggunakan bahasa alami, seperti: MUDA, PAROBAYA, TUA.
- b. Numeris, yaitu suatu nilai (angka) yang menunjukkan ukuran dari suatu variabel seperti: 40, 25, 50, dsb.

Ada beberapa hal yang perlu diketahui dalam memahami sistem fuzzy, yaitu:

- a. Variabel fuzzy

Variabel fuzzy merupakan variabel yang hendak dibahas dalam suatu sistem fuzzy. Contoh: umur, temperatur, permintaan, dsb.

- b. Himpunan fuzzy

Himpunan fuzzy merupakan suatu grup yang mewakili suatu kondisi atau keadaan tertentu dalam suatu variabel fuzzy.

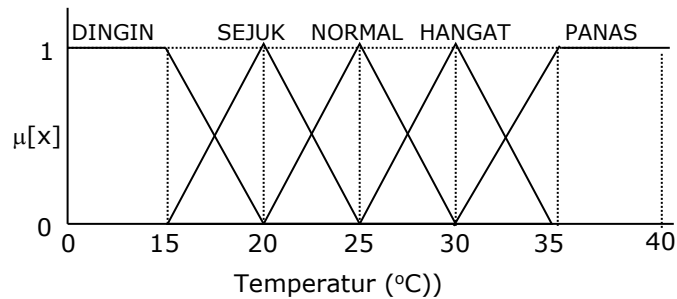
Contoh:

- Variabel umur, terbagi menjadi 3 himpunan fuzzy, yaitu: MUDA, PAROBAYA, dan TUA. (Gambar 2.3.3)
- Variabel temperatur, terbagi menjadi 5 himpunan fuzzy, yaitu: DINGIN, SEJUK, NORMAL, HANGAT, dan PANAS. (Gambar 2.3.4)



Gambar 2.3.4

Himpunan fuzzy pada variabel temperatur.



Semesta Pembicaraan Fuzzy

Semesta pembicaraan adalah keseluruhan nilai yang diperbolehkan untuk dioperasikan dalam suatu variabel fuzzy. Semesta pembicaraan merupakan himpunan bilangan real yang senantiasa naik (bertambah) secara monoton dari kiri ke kanan. Nilai semesta pembicaraan dapat berupa bilangan positif maupun negatif. Adakalanya nilai semesta pembicaraan ini tidak dibatasi batas atasnya.

Contoh:

- Semesta pembicaraan untuk variabel umur: $[0 +\infty)$
- Semesta pembicaraan untuk variabel temperatur: $[0 40]$

Domain Fuzzy

Domain himpunan fuzzy adalah keseluruhan nilai yang diijinkan dalam semesta pembicaraan dan boleh dioperasikan dalam suatu himpunan fuzzy. Seperti halnya semesta pembicaraan, domain merupakan himpunan bilangan real yang senantiasa naik (bertambah) secara monoton dari kiri ke kanan. Nilai domain dapat berupa bilangan positif maupun negatif.

Contoh domain himpunan fuzzy:

- MUDA = $[0 45]$
- PARUHBAYA = $[35 55]$
- TUA = $[45 +\infty)$
- DINGIN = $[0 20]$



- SEJUK = [15 25]
- NORMAL = [20 30]
- HANGAT = [25 35]
- PANAS = [30 40]

2. Penyajian Himpunan

Obyek dalam himpunan disebut elemen atau anggota (*member*). Keanggotaan suatu himpunan dinyatakan oleh notasi ' \in '.

Biasanya notasi himpunan ditulis dengan huruf besar, seperti A, B, C, Sedangkan elemen atau unsur atau anggota himpunan dengan huruf kecil, seperti p, q, r,

Himpunan yang tidak berisi obyek disebut himpunan kosong (*empty set*). Sedangkan *universal set* (semesta pembicaraan) berisi semua obyek yang sedang dibahas.

Contoh:

$$A = \{x, y, z\}$$

$x \in A$: x merupakan anggota himpunan A.

$w \notin A$: w bukan merupakan anggota himpunan A.

Ada beberapa cara untuk menyatakan himpunan, yaitu dengan cara enumerasi, simbol-simbol baku, notasi pembentuk bilangan atau sifat yang dimiliki, dan dengan diagram Venn.

a. Enumerasi

Mengenumerasi artinya menulis semua elemen himpunan yang bersangkutan di antara dua buah tanda kurung kurawal. Biasanya himpunan diberi nama dengan menggunakan huruf kapital maupun dengan menggunakan simbol-simbol lainnya. Enumerasi dilakukan dengan menuliskan tiap-tiap anggota himpunan di antara 2 kurung kurawal.



Contoh:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, R = \{a, b, \{a, b, c\}, \{a, c\}\}$$

$$K = \{\{\}\}$$

Maka:

$$3 \in A$$

$$\{a, b, c\} \in R$$

$$c \notin R$$

b. Simbol-simbol Baku

Beberapa simbol baku yang biasa digunakan untuk mendefinisikan himpunan antara lain:

P = himpunan bilangan bulat positif = $\{1, 2, 3, \dots\}$

N = himpunan bilangan alami (natural) = $\{1, 2, \dots\}$

Z = himpunan bilangan bulat = $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

Q = himpunan bilangan rasional

R = himpunan bilangan riil

C = himpunan bilangan kompleks

Himpunan universal (semesta), disimbolkan dengan **U** atau **S**, adalah himpunan semua objek yang dibicarakan.

c. Notasi Pembentuk Bilangan

Himpunan dinyatakan dengan menulis syarat yang harus dipenuhi atau sifat-sifat yang melekat pada anggotanya.

Notasi: $\{x \mid \text{syarat yang harus dipenuhi oleh atau sifat yang dimiliki } x\}$

Aturan dalam penulisan syarat keanggotaan:

- Bagian di kiri tanda ' \mid ' melambangkan elemen himpunan
- Tanda ' \mid ' dibaca dimana atau sedemikian sehingga
- Bagian di kanan tanda ' \mid ' menunjukkan syarat keanggotaan himpunan
- Setiap tanda ',' di dalam syarat keanggotaan dibaca *dan*

Contoh:

1. A adalah himpunan bilangan bulat positif yang lebih kecil dari 5.

Dinyatakan sebagai:



$A = \{ x \mid x \text{ adalah himpunan bilangan bulat positif lebih kecil dari } 5 \}$

Notasi matematikanya:

$$A = \{ x \mid x \in P, x < 5 \}$$

Yang ekuivalen dengan $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

2. B adalah himpunan bilangan genap positif yang lebih besar dari 2 dan lebih kecil atau sama dengan 8.

Dinyatakan sebagai:

$B = \{ x \mid x \text{ adalah himpunan bilangan genap positif yang lebih besar dari 2 dan lebih kecil atau sama dengan } 8 \}$

Notasi Matematikanya:

$$B = \{ x \mid x \in P, 2 < x \leq 8 \}$$

Yang ekuivalen dengan $B = \{ 4, 6, 8 \}$

d. Diagram Venn

Penyajian himpunan dengan diagram Venn ditemukan oleh seorang ahli matematika Inggris bernama *John Venn* tahun 1881. Himpunan semesta digambarkan dengan segiempat dan himpunan lainnya dengan lingkaran di dalam segiempat tersebut.

Contoh :

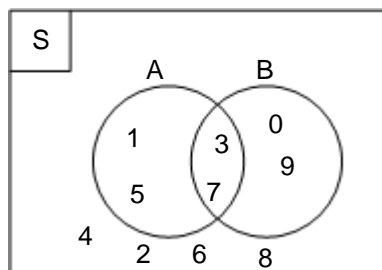
Gambarkan dengan diagram Venn himpunan-himpunan berikut ini :

1. $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 3, 5, 7\}$ dan $B = \{0, 3, 7, 9\}$
2. $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{0, 1, 3, 7\}$ dan $B = \{2, 4, 6\}$
3. $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7\}$ dan $B = \{0, 1, 3, 7\}$

Jawab :

1. $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 3, 5, 7\}$ dan $B = \{0, 3, 7, 9\}$

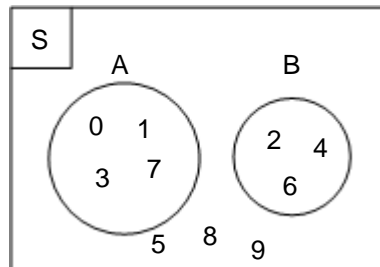
Diagram Venn:





2. $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{0, 1, 3, 7\}$ dan $B = \{2, 4, 6\}$

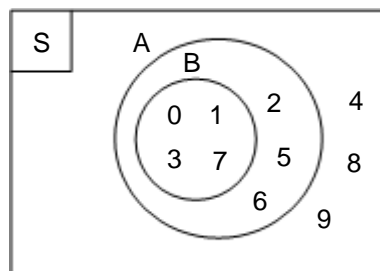
Diagram Venn :



3. $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7\}$ dan

$B = \{0, 1, 3, 7\}$

Diagram Venn:



Beberapa contoh soal :

Nyatakan dengan notasi himpunan dengan menuliskan tiap-tiap anggotanya dan sifat-sifatnya himpunan berikut ini:

1. A adalah himpunan bilangan asli antara 1 dan 6
2. B adalah himpunan mata kuliah yang anggotanya adalah : kalkulus, logika matematika, matematika diskrit, statistika, fisika
3. C adalah himpunan bilangan riil yang lebih besar dari 5
4. D adalah himpunan yang terdiri dari bilangan 2, 4, 6, 8, 10
5. E adalah himpunan bilangan riil lebih kecil dari 5 dan lebih besar dari 10

Jawab :



1. A adalah himpunan bilangan asli antara 1 dan 6.
Dengan menulis tiap-tiap anggotanya:
 $A = \{2, 3, 4, 5\}$

Dengan menulis sifat-sifatnya:
 $A = \{x \mid 1 < x < 6, x \in \text{Asli}\}$
2. B adalah himpunan mata kuliah yang anggotanya adalah : kalkulus, logika matematika, matematika diskrit, statistika, fisika.
Dengan menulis tiap-tiap anggotanya:
 $B = \{\text{kalkulus, logika matematika, matematika diskrit, statistika, fisika}\}$
Dengan menulis sifat-sifatnya:
B tidak bisa dituliskan sifat-sifatnya, karena tidak ada sifat yang sama di antara anggota-anggotanya
3. C adalah himpunan bilangan riil yang lebih besar dari 5.
Dengan menulis tiap-tiap anggotanya:
C tidak bisa dituliskan anggota-anggotanya, karena jumlah anggota C tak terhingga.
Dengan menulis sifat-sifatnya:
 $C = \{x \mid x > 5, x \in \text{Riil}\}$
4. D adalah himpunan yang terdiri dari bilangan 2, 4, 6, 8, 10.
Dengan menulis tiap-tiap anggotanya:
 $D = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

Dengan menulis sifat-sifatnya:
 $D = \{x \mid x \text{ adalah 5 buah bilangan asli pertama yang genap}\}$
5. E adalah himpunan bilangan riil lebih kecil dari 5 dan lebih besar dari 10.
Dengan menulis tiap-tiap anggotanya:
E tidak bisa dituliskan anggota-anggotanya, karena jumlah anggota C tak terhingga
Dengan menulis sifat-sifatnya:
 $E = \{x/x < 5 \text{ dan } x > 10, x \in \text{Riil}\}$



3. Kardinalitas

Himpunan dengan anggota yang banyaknya berhingga seperti himpunan A dan B pada beberapa contoh soal di atas disebut himpunan berhingga. Banyak anggota sebuah himpunan berhingga disebut kardinalitas.

Definisi formalnya sebagai berikut.

Misalkan himpunan A mempunyai anggota yang berhingga banyaknya. Jumlah anggota himpunan A disebut kardinal dari himpunan A, ditulis dengan notasi $n(A)$.

Contoh :

Bagaimana cara menentukan kardinalitas dari himpunan berikut? Berikan penjelasanmu!

1. $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
2. $B = \{x \mid 1 < x < 6, x \in \text{Asli}\}$
3. $C = \{x \mid x > 5, x \in \text{Riil}\}$
4. $D = \{x \mid x \text{ bilangan cacah yang lebih kecil dari } 10\}$
5. $E = \{x \mid x \text{ bilangan prima yang lebih kecil dari } 15\}$

Jawab :

1. $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
 $n(A) = 5$
2. $B = \{x \mid 1 < x < 6, x \in \text{Asli}\}$
 $B = \{2, 3, 4, 5\}$
 $n(B) = 4$
3. $C = \{x \mid x > 5, x \in \text{Riil}\}$
 $n(C) = \sim$
4. $D = \{x \mid x \text{ bilangan cacah yang lebih kecil dari } 10\}$
 $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
 $n(D) = 10$
5. $E = \{x \mid x \text{ bilangan prima yang lebih kecil dari } 15\}$
 $E = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$
 $n(E) = 6$

4. Himpunan Kosong



Himpunan kosong adalah himpunan yang tidak mempunyai elemen.

Notasi : \emptyset atau $\{\}$

Contoh:

(i) $E = \{x \mid x < x\}$, maka $n(E) = 0$

(ii) $P = \{\text{orang Indonesia yang pernah ke bulan}\}$, maka $n(P) = 0$

(iii) $A = \{x \mid x \text{ adalah akar persamaan kuadrat } x^2 + 1 = 0\}$, $n(A) = 0$

Himpunan $\{\{\}\}$ dapat juga ditulis sebagai $\{\emptyset\}$

Himpunan $\{\{\}, \{\{\}\}\}$ dapat juga ditulis sebagai $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$\{\emptyset\}$ bukan himpunan kosong karena ia memuat satu elemen yaitu himpunan kosong.

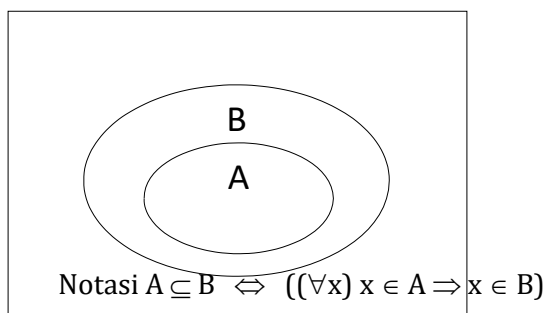
5. Himpunan Bagian dan Kesamaan Himpunan

a) Himpunan Bagian

Himpunan A dikatakan himpunan bagian (*subset*) dari himpunan B jika dan hanya jika setiap anggota A merupakan anggota B. Dalam hal ini, B dikatakan *super set* dari A.

Notasi himpunan bagian : $A \subset B$ atau $A \subseteq B$

Jika digambarkan dalam bentuk diagram Venn himpunan bagian tersebut menjadi :



Contoh :

(i) $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{R} \subseteq \mathbf{C}$

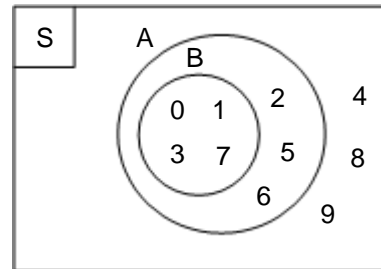
(ii) $\{2, 3, 5\} \subseteq \{2, 3, 5\}$

(iii) $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7\}$ dan
 $B = \{0, 1, 3, 7\}$



$$B \subseteq A$$

Diagram Venn :



Untuk setiap himpunan A berlaku hal-hal sebagai berikut:

- (a) A adalah himpunan bagian dari A itu sendiri (yaitu, $A \subseteq A$).
- (b) Himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari A ($\emptyset \subseteq A$).
- (c) Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$, maka $A \subseteq C$

$\emptyset \subseteq A$ dan $A \subseteq A$, maka \emptyset dan A disebut himpunan bagian tak sebenarnya (*improper subset*) dari himpunan A .

Pernyataan $A \subseteq B$ berbeda dengan $A \subset B$:

$A \subset B$: A adalah himpunan bagian dari B tetapi $A \neq B$.

Yang demikian, A merupakan himpunan bagian sebenarnya (*proper subset*) dari B .

Contoh:

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$A = \{x \mid x(x-1)(x-3) = 0, x \in \text{Riil}\}$$

$$B = \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7\}$$

$$A = \{0, 1, 3\}$$

$$\text{Maka, } A \subseteq B$$

$$\text{Misalkan } A = \{1, 2, 3\}.$$

$\{1\}$ dan $\{2, 3\}$ merupakan *proper subset* dari A .

Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$, maka $\{1, 2, 3\}$ dan \emptyset adalah *improper subset* dari A .

Contoh:



Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Tentukan semua kemungkinan himpunan C sedemikian sehingga $A \subset C$ dan $C \subset B$, yaitu A adalah *proper subset* dari C dan C adalah *proper subset* dari B .

Jawab:

C harus mengandung semua elemen $A = \{1, 2, 3\}$ dan sekurang-kurangnya satu elemen dari B .

Dengan demikian, $C = \{1, 2, 3, 4\}$ atau $C = \{1, 2, 3, 5\}$.

C tidak boleh memuat 4 dan 5 sekaligus, karena jika demikian maka C adalah *proper subset* dari B .

b) Kesamaan Himpunan

Himpunan A dikatakan sama dengan himpunan B jika dan hanya jika setiap anggota A adalah anggota B dan setiap anggota B adalah anggota A .

Jika tidak demikian, maka $A \neq B$.

Notasi : $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$

Contoh :

- i) Jika $A = \{0, 1\}$ dan $B = \{x \mid x(x-1) = 0\}$, maka $A = B$
- ii) Jika $A = \{3, 5, 8\}$ dan $B = \{5, 3, 8\}$, maka $A = B$
- iii) Jika $A = \{3, 5, 8\}$ dan $B = \{3, 8\}$, maka $A \neq B$

Untuk tiga buah himpunan, A , B , dan C berlaku aksioma berikut:

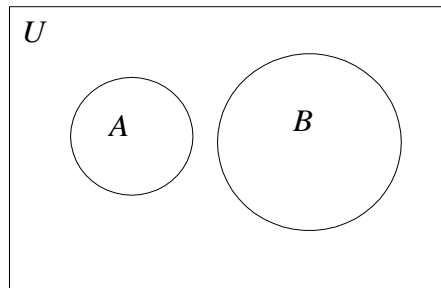
- (a) $A = A$, $B = B$, dan $C = C$
- (b) jika $A = B$, maka $B = A$
- (c) jika $A = B$ dan $B = C$, maka $A = C$

6. Himpunan Saling Lepas

Himpunan A dan himpunan B dikatakan saling lepas (*disjoint*) jika kedua himpunan tidak mempunyai anggota yang sama.

Notasi : $A // B$

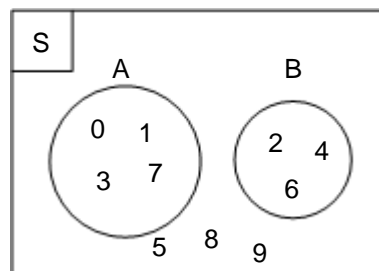
Dengan diagram Venn:



Contoh :

$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{0, 1, 3, 7\}$ dan $B = \{2, 4, 6\}$

Diagram Venn:



7. Himpunan yang Ekuivalen

Himpunan A dikatakan ekuivalen dengan himpunan B, jika dan hanya jika kardinal dari kedua himpunan sama.

Notasi : $A \sim B \Leftrightarrow n(A) = n(B)$

Contoh:

$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,

$A = \{0, 1, 3, 7\} \Rightarrow n(A) = 4$

$B = \{2, 4, 6, 7\} \Rightarrow n(B) = 4$

$n(A) = n(B) \Rightarrow A \sim B$

8. Himpunan Kuasa

Himpunan kuasa (*power set*) dari himpunan A adalah himpunan yang anggotanya merupakan semua himpunan bagian dari A, termasuk himpunan semesta dan himpunan kosong.



Notasi : $p(A)$

Contoh:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$p(A) = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Perhatikan bahwa himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari semuahimpunan. Untuk membuktikan hal ini kita memerlukan pemahaman tentang implikasi, seperti telah dibahas pada modul Logika Matematika grade 2 sebelumnya. Perhatikan pula pada contoh ini bahwa himpunan kuasa $2S$ memiliki kardinalitas 8. Secara umum, kita mempunyai teorema berikut:

Teorema 2.1 (Kardinalitas Himpunan Kuasa).

Untuk sembarang himpunan A , $n(p(A)) = 2^{n(A)}$.

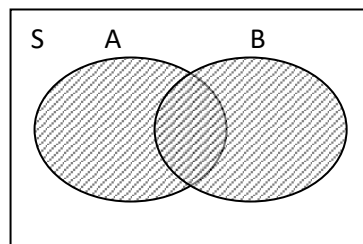
9. Operasi pada Himpunan

a. Gabungan

Gabungan (*union*) dari himpunan A dan B adalah himpunan yang setiap anggotanya merupakan anggota himpunan A atau himpunan B .

$$\text{Notasi : } A \cup B = \{x \mid x \in A \cup x \in B\}$$

Diagram Venn:

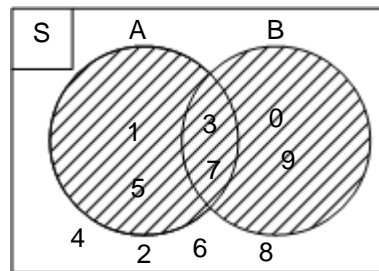


Contoh:

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, A = \{1, 3, 5, 7\} \text{ dan } B = \{0, 3, 7, 9\}$$



Diagram Venn:



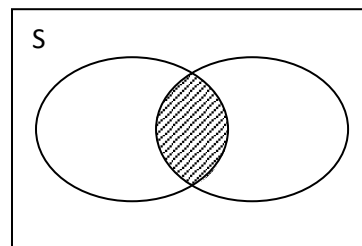
$$A \cup B = \{0, 1, 3, 5, 7, 9\}$$

b. Irisan

Irisan (*intersection*) dari himpunan A dan B adalah himpunan yang setiap anggotanya merupakan anggota dari himpunan A dan anggota himpunan B.

$$\text{Notasi : } A \cap B = \{x \mid x \in A \cap x \in B\}$$

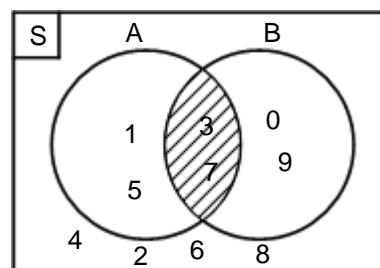
Diagram Venn:



Contoh:

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, A = \{1, 3, 5, 7\} \text{ dan } B = \{0, 3, 7, 9\}$$

Diagram Venn :





$$A \cap B = \{3, 7\}$$

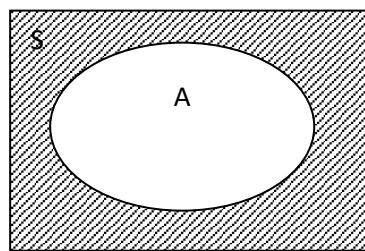
c. Komplemen

Komplemen himpunan A terhadap himpunan semesta S adalah himpunan yang anggotanya merupakan anggota S yang bukan anggota A.

Notasi : $A^c = \{x \mid x \in S \cap x \notin A\}$

atau $\overline{A} = \{x \mid x \in S \cap x \notin A\}$

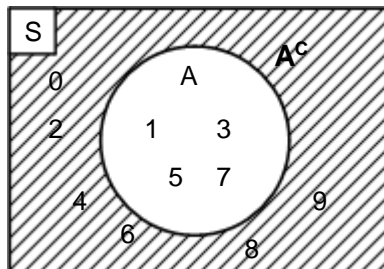
Diagram Venn:



Contoh :

$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 3, 5, 7\}$

Diagram Venn:



d. Selisih

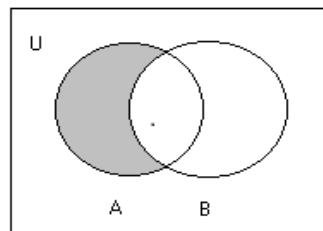
Selisih himpunan A dan B adalah himpunan yang anggotanya merupakan anggota himpunan A dan bukan anggota himpunan B. Selisih himpunan A dan B adalah komplemen himpunan B terhadap himpunan A.

Notasi : $A - B = \{x \mid x \in A \cap x \notin B\}$

Atau $A - B = A \cap B^c$



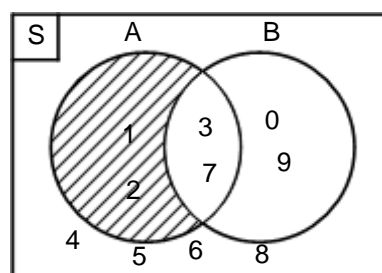
Diagram Venn:



Contoh :

$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 2, 3, 7\}$ dan $B = \{0, 3, 7, 9\}$

Diagram Venn:



$$A - B = \{1, 2\}$$

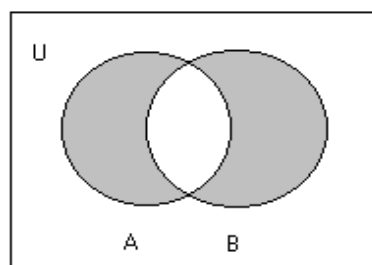
e. Beda Setangkup

Beda Setangkup (*symmetric difference*) dari himpunan A dan B adalah himpunan yang anggotanya ada pada himpunan A atau B, tetapi tidak pada keduanya.

$$\text{Notasi : } A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

$$\text{atau : } A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

Diagram Venn:

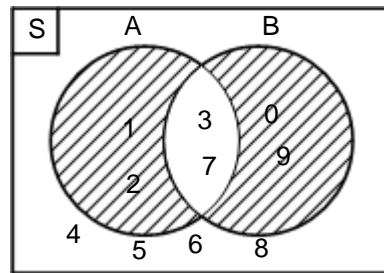


Contoh :

$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 2, 3, 7\}$ dan $B = \{0, 3, 7, 9\}$



Diagram Venn:



$$A \oplus B = \{0, 1, 2, 9\}$$

10. Perkalian Kartesian (*Cartesius Product*)

Perkalian kartesian antara dua buah himpunan dinotasikan oleh tanda '×'. Misalkan A dan B adalah himpunan, maka perkalian kartesian antara A dan B dinotasikan oleh:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B\}$$

Contoh:

Misalkan $C = \{1, 2, 3\}$, dan $D = \{a, b\}$, maka:

$$C \times D = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

Misalkan $A = B$ himpunan semua bilangan riil, maka:

$A \times B$ = himpunan semua titik di bidang datar

Misalkan ada dua himpunan dengan kardinalitas berhingga, maka kardinalitas himpunan hasil dari suatu perkalian kartesian antara dua himpunan tersebut adalah perkalian antara kardinalitas masing-masing himpunan. Dengan demikian, jika A dan B merupakan himpunan berhingga, maka:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Pasangan terurut (a, b) berbeda dengan (b, a) , dengan kata lain:

$$(a, b) \neq (b, a).$$



Dengan argumen ini berarti perkalian kartesian tidak komutatif, yaitu:

$$A \times B \neq B \times A$$

Dimana A atau B bukan himpunan kosong.

Jika $A=\emptyset$ atau $B=\emptyset$, maka:

$$A \times B = B \times A = \emptyset$$

11. Sifat-sifat Operasi pada Himpunan

Misalkan S adalah semesta pembicaraan dan A, B, C adalah himpunan-himpunan dalam S . Operator-operator himpunan memenuhi beberapa hukum berikut:

1) Hukum Identitas

- a) $A \cup \emptyset = A$
- b) $A \cap S = A$
- c) $A \oplus \emptyset = A$

2) Hukum Null

- a) $A \cap \emptyset = \emptyset$
- b) $A \cup S = S$
- c) $A \oplus A = \emptyset$

3) Hukum Komplemen

- a) $A \cup A^c = S$
- b) $A \cap A^c = \emptyset$

4) Hukum Idempoten

- a) $A \cup A = A$
- b) $A \cap A = A$

5) Hukum Involusi

$$(A^c)^c = A$$

6) Hukum Penyerapan

- a) $A \cup (A \cap B) = A$
- b) $A \cap (A \cup B) = A$



7) Hukum Komutatif

- a) $A \cup B = B \cup A$
- b) $A \cap B = B \cap A$
- c) $A \oplus B = B \oplus A$

8) Hukum Asosiatif

- a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- c) $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$

9) Hukum Distributif

- a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

10) Hukum De Morgan

- a) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
- b) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

12. Prinsip Inklusi-Eksklusi

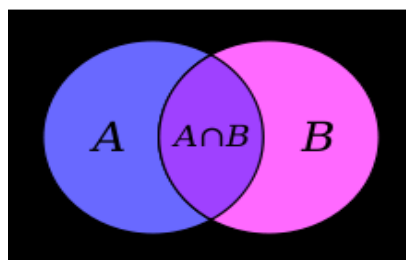
Kadang-kadang kita perlu menyatakan kardinalitas gabungan dua buah himpunan.

Untuk menghitung kardinalitas $A \cup B$, kita dapat menjumlahkan kardinalitas A dan kardinalitas B. Dengan cara ini anggota himpunan yang berada di A dan B akan terhitung dua kali. Karena itu kita harus mengurangkannya seperti pada teorema berikut ini.

Teorema 2.2 (Prinsip Penjumlahan). *Jika A dan B adalah dua himpunan berhingga, maka :*

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Diagram Venn untuk 2 himpunan tersebut sebagai berikut:



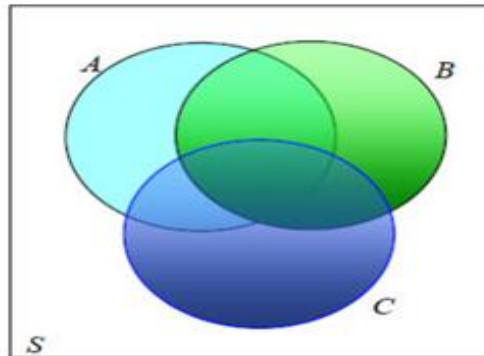
Teorema di atas dikenal pula sebagai **prinsip inklusi-eksklusi**.



Untuk tiga buah himpunan A , B , dan C , berlaku

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Diagram Venn untuk 3 himpunan tersebut sebagai berikut.



Dari rumusan prinsip inklusi-eksklusi di atas, secara umum kita dapatkan:

Untuk himpunan A_1, A_2, \dots, A_r , berlaku:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r| = \sum_i |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq r} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq r} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^{r-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_r|$$

Contoh soal:

Dari survei di sebuah kelas diketahui bahwa ada 25 siswa yang menyukai membaca dan 30 yang menyukai traveling. Ditemukan pula bahwa dikelas itu ada 15 orang yang suka membaca dan traveling. Ada berapa siswa dalam kelas itu?

Jawab:

Untuk menjawab soal ini, kita misalkan:

$A = \{x \mid x \text{ adalah mahasiswa yang suka membaca}\}$

$B = \{x \mid x \text{ adalah mahasiswa yang suka traveling}\}$

Diketahui dari soal:



$$n(A) = 25$$

$$n(B) = 30$$

$$n(A \cap B) = 15$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

maka jumlah mahasiswa dikelas itu adalah $25 + 30 - 15 = 40$

Contoh soal:

Di antara bilangan bulat antara 101 – 600 (termasuk 101 dan 600 itu sendiri), berapa banyak bilangan yang tidak habis dibagi oleh 4 atau 5 namun tidak keduanya?

Jawab:

Diketahui:

$$|S| = 500$$

$$|A| = \lfloor 600/4 \rfloor - \lfloor 100/4 \rfloor = 150 - 25 = 125$$

$$|B| = \lfloor 600/5 \rfloor - \lfloor 100/5 \rfloor = 120 - 20 = 100$$

$$|A \cap B| = \lfloor 600/20 \rfloor - \lfloor 100/20 \rfloor = 30 - 5 = 25$$

yang ditanyakan $|A \oplus B|^c = ?$

Hitung terlebih dahulu:

$$|A \oplus B| = |A| + |B| - 2|A \cap B| = 125 + 100 - 50 = 175$$

untuk mendapatkan:

$$|A \oplus B|^c = S - |A \oplus B| = 500 - 175 = 325$$

Contoh soal:

Di antara 100 mahasiswa, 32 orang mempelajari Kalkulus, 20 mempelajari Aljabar, 45 mempelajari Mat-Diskrit, 15 mempelajari Kalkulus dan Mat-Diskrit, 7 mempelajari Kalkulus dan Aljabar, 10 mempelajari Aljabar dan Mat-Diskrit, dan 30 orang tidak mempelajari satu pun diantara ketiga bidang tersebut.

(a) Berapa banyak mahasiswa yang mempelajari ketiga bidang tersebut?



(b) Berapa banyak mahasiswa yang mempelajari hanya satu di antara ketiga bidang tsb ?

Jawab:

Diketahui:

Jml total mhs: $U = 100$,

$|K| = 32$, $|A| = 20$, $|D| = 45$,

$|K \cap D| = 15$, $|K \cap A| = 7$, $|A \cap D| = 10$,

$|K \cap A \cap D|^c = 30 \rightarrow |K \cup A \cup D| = 100 - 30 = 70$,

$|K \cup A \cup D| = |K| + |A| + |D| - |K \cap D| - |K \cap A| - |A \cap D| + |K \cap A \cap D|$

$70 = 32 + 20 + 45 - 15 - 7 - 10 + |K \cap A \cap D|$

$|K \cap A \cap D| = 5$.

(a) Jadi yg mempelajari ketiga bidang: 5 orang

$K \text{ (saja)} = 32 - 15 - 7 + 5 = 15$,

$A \text{ (saja)} = 20 - 7 - 10 + 5 = 8$,

$M \text{ (saja)} = 45 - 15 - 10 + 5 = 25$.

(b) Jadi total yang hanya mempelajari satu mata kuliah adalah:

$(15 + 8 + 25) = 48$ orang.

13. Prinsip Dualitas

Prinsip dualitas mengemukakan bahwa dua konsep yang berbeda dapat dipertukarkan namun tetap memberikan jawaban yang benar.

Contoh:

Amerika Serikat: kemudi mobil dikiri depan

Indonesia: kemudi mobil di kanan depan

Peraturan:

Di Amerika Serikat, mobil harus berjalan di bagian kanan jalan, pada jalan yang berlajur banyak, lajur kiri untuk mendahului, bila lampu merah menyala, mobil belok kanan boleh langsung.

Di Indonesia,



mobil harus berjalan di bagian kiri jalan, pada jalur yang berlajur banyak, lajur *kanan* untuk mendahului, bila lampu merah menyala, mobil belok *kiri* boleh langsung.

Prinsip dualitas pada kasus diatas adalah:

Konsep kiri dan kanan dapat dipertukarkan pada kedua negara tersebut sehingga peraturan yang berlaku di Amerika Serikat menjadi berlaku pula di Inggris.

Prinsip Dualitas pada Himpunan

Misalkan S adalah suatu kesamaan (*identity*) yang melibatkan himpunan dan operasi-operasi seperti \cup , \cap , dan komplemen. Jika S^* merupakan kesamaan yang berupa dual dari S maka dengan mengganti $\cup \rightarrow \cap$, $\cap \rightarrow \cup$, $\emptyset \rightarrow U$, $U \rightarrow \emptyset$, sedangkan komplemen dibiarkan seperti semula, maka operasi-operasi tersebut pada kesamaan S^* juga benar.

Selain dari beberapa sifat operasi pada himpunan ada cara lain dengan mengganti tanda \cup dengan \cap , \cap dengan \cup , \emptyset dengan U , U dengan \emptyset . Cara ini dikenal dengan Prinsip Dualitas. Prinsip Dualitas sering digunakan untuk menurunkan hukum yang lain dan membuktikan suatu kalimat himpunan.

1) Hukum Identitas : $A \cup \emptyset = A$	Dualnya : $A \cap S = A$
2) Hukum Null : $A \cap \emptyset = \emptyset$	Dualnya : $A \cup S = S$
3) Hukum Komplemen : $A \cup A^c = S$	Dualnya : $A \cap A^c = \emptyset$
4) Hukum Idempoten : $A \cup A = A$	Dualnya : $A \cap A = A$
5) Hukum Penyerapan : $A \cup (A \cap B) = A$	Dualnya : $A \cap (A \cup B) = A$
6) Hukum Komutatif : $A \cup B = B \cup A$	Dualnya : $A \cap B = B \cap A$



7) Hukum Asosiatif : $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	Dualnya : $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
8) Hukum Distributif : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Dualnya : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
9) Hukum Komutatif : $A \cup B = B \cup A$	Dualnya : $A \cap B = B \cap A$
10) Hukum De Morgan : $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	Dualnya : $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Contoh:

Dual dari $(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A$ adalah $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A$.

Atau:

Misalkan $A \in S$ dimana $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$

Maka pada dualnya, misalkan S^* , berlaku:

$$A = (A \cup B) \cap (A \cup B^c)$$

14. Pembuktian Kalimat Himpunan

Kalimat himpunan adalah pernyataan yang menggunakan notasi himpunan. Kalimat himpunan dapat berupa kesamaan himpunan, dan untuk membuktikan kebenaran pada kesamaan himpunan dapat digunakan beberapa cara untuk memperoleh kesimpulan benar.

Ada beberapa cara dalam membuktikan kebenaran suatu pernyataan atau merepresentasikan pernyataan, yaitu: menggunakan diagram Venn, aljabar himpunan, definisi himpunan, dan tabel kebenaran.

a. Pembuktian dengan menggunakan diagram Venn

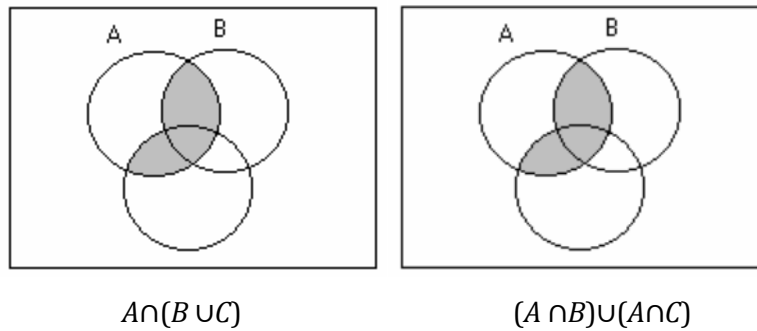
Contoh:

Misalkan A, B , dan C adalah himpunan. Tunjukkan bahwa $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ dengan diagram Venn. Apa kesimpulan yang kamu peroleh?

Jawab :



Cara ini dilakukan bukan dalam pembuktian formal, dengan menggambarkan sejumlah himpunan yang diketahui dan mengarsir setiap operasi yang diinginkan secara bertahap, sehingga diperoleh himpunan hasil operasi secara keseluruhan.



Kedua diagram Venn memberikan area arsiran yang sama.

Terbukti bahwa: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Diagram Venn hanya dapat digunakan jika himpunan yang digambarkan tidak banyak jumlahnya.

Metode ini mengilustrasikan ketimbang membuktikan fakta.

Diagram Venn tidak dianggap sebagai metode yang valid untuk pembuktian secara formal.

b. Pembuktian dengan menggunakan aljabar himpunan

Beberapa contoh dalam membuktikan pernyataan dengan menggunakan aljabar himpunan.

Contoh:

Buktikan:

1. $(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A$
2. $A \cup (B - A) = A \cup B$
3. $(A - B) - C = (A - C) - B$
4. $A \cup (A \cup B)^c = A \cup B^c$



$$5. A \cup (A^c \cap B) = A \cup B$$

$$6. A \cap (A^c \cup B) = A \cap B$$

Bukti :

$$\begin{aligned} 1. (A \cap B) \cup (A \cap B^c) &= A \cap (B \cup B^c) \quad (\text{hukum distributif}) \\ &= A \cap S \quad (\text{hukum komplemen}) \\ &= A \quad (\text{hukum identitas}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. A \cup (B - A) &= A \cup (B \cap A^c) \quad (\text{definisi operasi selisih}) \\ &= (A \cup B) \cap (A \cup A^c) \quad (\text{hukum distributif}) \\ &= (A \cup B) \cap S \quad (\text{hukum komplemen}) \\ &= A \cup B \quad (\text{hukum identitas}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. (A - B) - C &= (A \cap B^c) - C \quad (\text{definisi operasi selisih}) \\ &= (A \cap B^c) \cap C^c \quad (\text{definisi operasi selisih}) \\ &= (A \cap C^c) \cap B^c \quad (\text{hukum asosiatif}) \\ &= (A - C) \cap B^c \quad (\text{definisi operasi selisih}) \\ &= (A - C) - B \quad (\text{definisi operasi selisih}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. A \cup (A \cup B)^c &= A \cup (A^c \cap B^c) \quad (\text{hukum De Morgan}) \\ &= (A \cup A^c) \cap (A \cup B^c) \quad (\text{hukum distributif}) \\ &= S \cap (A \cup B^c) \quad (\text{hukum komplemen}) \\ &= A \cup B^c \quad (\text{hukum identitas}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. A \cup (A^c \cap B) &= (A \cup A^c) \cap (A \cup B) \quad (\text{hukum distributif}) \\ &= S \cap (A \cup B) \quad (\text{hukum komplemen}) \end{aligned}$$



$$= A \cup B \quad (\text{hukum identitas})$$

$$6. A \cap (A^c \cup B) = (A \cap A^c) \cup (A \cap B) \quad (\text{hukum distributif})$$

$$= \phi \cup (A \cap B) \quad (\text{hukum komplemen})$$

$$= A \cap B \quad (\text{hukum identitas})$$

c. Pembuktian dengan menggunakan tabel kebenaran

Pembuktian suatu ekspresi atau persamaan himpunan dapat juga digunakan tabel kebenaran, yaitu dengan membandingkan tabel kebenaran ruas kiri dengan tabel kebenaran ruas kanannya. Jika tabel kebenarannya sama maka ekspresi himpunan terbukti, sebaliknya jika tidak sama maka tidak terbukti.

Contoh:

Misalkan A , B , dan C adalah himpunan. Buktikan bahwa:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Bukti:

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Karena kolom $A \cap (B \cup C)$ dan kolom $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ sama, maka:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$



d. Pembuktian dengan menggunakan definisi

Metode ini digunakan untuk membuktikan pernyataan himpunan yang tidak berbentuk kesamaan, tetapi pernyataan yang berbentuk implikasi. Biasanya di dalam implikasi tersebut terdapat notasi himpunan bagian (\subseteq atau \subset).

Contoh:

Misalkan A dan B himpunan. Jika $A \cap B = \emptyset$ dan $A \subseteq (B \cup C)$ maka $A \subseteq C$. Buktikan!

Bukti:

(i) Dari definisi himpunan bagian, $P \subseteq Q$ jika dan hanya jika setiap $x \in P$ juga $x \in Q$. Misalkan $x \in A$, karena $A \subseteq (B \cup C)$, maka dari definisi himpunan bagian, x juga $\in (B \cup C)$.

Dari definisi operasi gabungan (\cup), $x \in (B \cup C)$ berarti $x \in B$ atau $x \in C$.

(ii) Karena $x \in A$ dan $A \cap B = \emptyset$, maka $x \notin B$

Dari (i) dan (ii), $x \in C$ harus benar. Karena $\forall x \in A$ juga berlaku $x \in C$, maka dapat disimpulkan $A \subseteq C$.

D. Aktivitas Pembelajaran

1. Pengantar

Dalam kegiatan ini Anda akan melakukan serangkaian aktivitas atau kegiatan untuk mencapai kompetensi profesional berkaitan dengan materi pokok Himpunan yang mempunyai sub materi penyajian himpunan, himpunan bagian, operasi pada himpunan, prinsip inklusi-eksklusi, pembuktian dengan menggunakan sifat-sifat operasi himpunan. Kegiatan-kegiatan tersebut akan terbagi ke dalam beberapa aktivitas atau sub materi pokok dan berhubungan dengan lembar kerja yang harus dilengkapi atau dilaksanakan, baik secara individu maupun kelompok,

2. Aktivitas 0: : Identifikasi bahan ajar

Pelajari dengan seksama materi pokok notasi sigma dalam modul ini dan diskusikan dengan rekan guru dan presentasikan.



Ada berapa aktivitas yang harus anda ikuti dalam mempelajari modul ini. Jawablah pertanyaan di atas dengan menggunakan lembar kerja 3.0.1 dan 3.0.2 (Lampiran Kegiatan Belajar)

3. Aktivitas 1 : Penyajian Himpunan

Dalam aktivitas ini anda akan mempelajari tentang penyajian himpunan baik dengan pasangan berurutan maupun dengan diagram venn dan bagian.

Jawablah pertanyaan di bawah ini dalam lembar kerja 3.1.1 dan

3.1.2, . Jika anda kesulitan menjawab disarankan untuk membaca materi

Tentang Himpunan. Hasilnya dipresentasikan di depan kelas dengan penuh tanggung jawab.

LK 3.1.1

Diketahui $A = \{x/ x < 10, x \in \mathbb{N}\}$

- Bagaimana cara menentukan anggota himpunan A dalam pasangan berurutan? Berikan penjelasanmu!
- Tuliskan langkah-langkah dalam membuat diagram venn dari himpunan A.
- Konsep apa yang digunakan untuk menentukan kardinalitas dari himpunan A? Tentukan kardinalitas nya!
- Tuliskan himpunan Kuasa dari himpunan A disertai penjelasan.

4. Aktivitas 2 : Penggunaan sifat-sifat Operasi himpunan dan prinsip inklusi dan eksklusi

Dalam aktivitas ini anda akan mempelajari tentang operasi Himpunan seperti Complemen, Irisan, Gabungan, selisih, beda setangkup. Jawablah pertanyaan di bawah ini dalam lembar kerja 3.2.1,

LK 3.2.1

- Diketahui $S = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $A = \{2,4,6,8\}$ dan $B = \{2,4,8\}$. Buatlah himpunan pasangan berurutan. Bagaimana cara menggambarkan diagram venn nya? Berikan penjelasanmu!
 - A^c dan B^c



- b. $A \cap B$
- c. $A \cup B$
- d. $A \cup B^c$
- e. $B \cap (A^c \cup B)$
- f. $A - B^c$
- g. $(A \oplus B^c)$

2. Dari survei terhadap 250 orang didapatkan hasil sebagai berikut:

68 suka donat,

93 suka bolu,

60 suka kacang,

30 suka donat dan bolu,

25 suka donat dan kacang,

22 suka bolu dan kacang,

15 suka ketiga jenis makanan tersebut.

Bagaimana cara menentukan orang tidak suka makan semua jenis makanan yang disebutkan di atas? Buatlah kesimpulan dari jawaban yang kamu peroleh!

5. Aktivitas 3 : Pembuktian dengan sifat-sifat operasi himpunan

Dalam aktivitas ini anda akan mempelajari tentang pembuktian dengan sifat-sifat operasi Himpunan seperti

Jawablah pertanyaan di bawah ini dalam lembar kerja 3.3.1,

LK 3.3.1

Buktikan :

- 1. $A \cup (A^c - B) = A^c \cap B^c$
- 2. $(A \cap B) \cup (A - B) = A$

6. Aktivitas 4: instrumen penilaian

Dalam kegiatan ini Anda akan berlatih untuk menyusun instrumen penilaian pada materi Himpunan yang sedang dipelajari, dengan mengacu pada panduan penulisan soal dari PUSPENDIK, diskusikan dengan sesama peserta. Kerjakan dengan rasa tanggung jawab, cermat dan percaya diri.



A. Rangkuman

1. Himpunan (*set*) adalah kumpulan objek-objek yang berbeda, terdefinisi secara jelas (*crisp*) dan tidak terurut (*unordered*).
2. Logika fuzzy pertama kali dikembangkan oleh Lotfi A. Zadeh melalui tulisannya pada tahun 1965 tentang teori himpunan fuzzy.
3. Lotfi Asker Zadeh adalah seorang ilmuwan Amerika Serikat berkebangsaan Iran dari Universitas California di Berkeley.
4. Meskipun logika fuzzy dikembangkan di Amerika, namun ia lebih populer dan banyak diaplikasikan secara luas oleh praktisi Jepang dengan mengadaptasikannya ke bidang kendali (*control*).
5. Saat ini banyak dijual produk elektronik buatan Jepang yang menerapkan prinsip logika fuzzy, seperti mesin cuci, AC, dan lain-lain.
6. Fuzzy logic sudah diterapkan pada banyak bidang, mulai dari teori kendali hingga inteligensi buatan.
7. Logika fuzzy umumnya diterapkan pada masalah-masalah yang mengandung unsur ketidakpastian (*uncertainty*), ketidaktepatan (*imprecise*), *noisy*, dan sebagainya.
8. Logika fuzzy menjembatani bahasa mesin yang presisi dengan bahasa manusia yang menekankan pada makna atau arti (*significance*).
9. Logika fuzzy dikembangkan berdasarkan bahasa manusia (bahasa alami).
10. Berbeda dengan logika kuno / logika digital yang hanya memiliki nilai 0 dan 1, atau "true" dan "false", maka dengan logika fuzzy sesuatu dapat memiliki nilai diantara range 0 dan 1.
11. Secara bahasa, "Fuzzy" berarti kabur atau samar. Logika fuzzy adalah logika *multivalued* yang memungkinkan untuk mendefinisikan nilai menengah diantara dua logika/ evaluasi konvensional yang berbeda, seperti benar/salah, iya/tidak, tinggi/rendah, panas/dingin, dll. Oleh karena itulah logika ini disebut logika samar. Sehingga dalam teori fuzzy sesuatu dapat bernilai salah atau benar secara bersamaan.
12. Atau dengan istilah lain, Logika fuzzy adalah suatu cara untuk memetakan suatu ruang input kedalam suatu ruang output, mempunyai nilai *continue*.



13. Fuzzy dinyatakan dalam derajat dari suatu keanggotaan dan derajat dari kebenaran. Oleh sebab itu sesuatu dapat dikatakan sebagian benar dan sebagian salah pada waktu yang sama (Kusumadewi. 2004)
14. Dalam ilmu logika fuzzy kita mengenal dua himpunan, yaitu himpunan crisp (tegas) dan himpunan fuzzy (samar).
15. Semesta pembicaraan adalah keseluruhan nilai yang diperbolehkan untuk dioperasikan dalam suatu variabel fuzzy. ` Semesta pembicaraan merupakan himpunan bilangan real y g an senantiasa naik (bertambah) secara monoton dari kiri ke kanan.
16. Nilai semesta pembicaraan dapat berupa bilangan positif maupun negatif. ` Adakalanya nilai semesta pembicaraan ini tidak dibatasi batas atasnya.
17. Domain himpunan fuzzy adalah keseluruhan nilai yang diijinkan diijinkan dalam semesta semesta pembicaraan pembicaraan dan boleh dioperasikan dalam suatu himpunan fuzzy.
18. Seperti halnya semesta pembicaraan, domain merupakan himpunan bilangan real yang senantiasa naik (bertambah) secara monoton dari kiri ke kanan.
19. Nilai domain dapat berupa bilangan positif maupun negatif.
20. Himpunan crisp adalah himpunan yang menyatakan suatu obyek merupakan anggota dari **satu himpunan** memiliki nilai keanggotaan (μ) = ya (1) atau tidak (0), oleh karena itu himpunan crisp disebut himpunan tegas.
21. Himpunan fuzzy adalah himpunan yang menyatakan suatu obyek dapat menjadi anggota dari beberapa himpunan dengan nilai keanggotaan (μ) yang berbeda.
22. Himpunan (*crisp*) biasanya dinyatakan dengan huruf besar A, B, C, Untuk menyatakan suatu himpunan digunakan simbol "{....}". Sementara itu untuk melambangkan anggota himpunan biasanya menggunakan huruf kecil a, b, c,
23. Untuk menyatakan anggota suatu himpunan digunakan lambang " \in " (baca: anggota) sedangkan untuk menyatakan bukan anggota suatu himpunan digunakan lambang " \notin " (baca: bukan anggota).
24. Ada 4 (empat) cara menyajikan himpunan, yaitu: enumerasi, menyatakan sifat yang dimiliki anggotanya, notasi baku, dan diagram Venn.
25. Banyak anggota sebuah himpunan berhingga (misalnya A) disebut kardinalitas, dinotasikan dengan $n(A)$.



26. Himpunan semesta adalah himpunan yang anggotanya semua objek pembicaraan. Himpunan semesta dilambangkan dengan S atau U .
27. Himpunan kosong adalah himpunan yang tidak mempunyai anggota. Dilambangkan dengan " \emptyset " atau $\{ \}$.
28. Jika setiap anggota A merupakan anggota B maka dikatakan A merupakan himpunan bagian (*subset*) dari B atau dikatakan B memuat A (B *superset* dari A) dan dilambangkan dengan $A \subset B$. Jadi $A \subset B$ jika dan hanya jika $x \in A \Rightarrow x \in B$.
Jika ada anggota dari A yang bukan merupakan anggota B maka A bukan himpunan bagian dari B , dilambangkan dengan $A \not\subset B$.
29. Himpunan A dikatakan sama dengan himpunan B jika dan hanya jika setiap anggota A adalah anggota B dan setiap anggota B adalah anggota A . Notasi : $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$. Jika tidak demikian, maka $A \neq B$.
30. Gabungan himpunan A dan B ditulis dengan $A \cup B$ adalah suatu himpunan yang anggotanya berada di A atau berada di B .
31. Irisan himpunan A dan B ditulis dengan $A \cap B$ adalah suatu himpunan yang anggotanya berada di A dan juga berada di B .
32. Komplemen dari A ditulis dengan " A^c " atau adalah himpunan yang anggotanya berada dalam himpunan semesta tetapi bukan berada di A .
33. Selisih himpunan A dan B adalah himpunan yang anggotanya merupakan anggota himpunan A dan bukan anggota himpunan B .
34. Beda Setangkup (*symmetric difference*) dari himpunan A dan B adalah himpunan yang anggotanya ada pada himpunan A atau B , tetapi tidak pada keduanya.
35. Perkalian kartesian antara dua buah himpunan dinotasikan oleh tanda ' \times '.
Misalkan A dan B adalah himpunan, maka perkalian kartesian antara A dan B dinotasikan oleh:
$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B \}$$
36. Perkalian kartesian bersifat tidak komutatif, yaitu:
$$A \times B \neq B \times A$$

Dimana A atau B bukan himpunan kosong.
37. Misalkan S adalah semesta pembicaraan dan A, B, C adalah himpunan-himpunan dalam S . Operator-operator himpunan memenuhi beberapa hukum berikut:



Identitas, Null, Komplemen, Idempoten, Involusi, Penyerapan, Komutatif, Asosiatif, Distributif, De Morgan.

38. Prinsip dualitas mengemukakan bahwa dua konsep yang berbeda dapat dipertukarkan namun tetap memberikan jawaban yang benar.
39. Prinsip dualitas sering digunakan untuk menurunkan hukum yang lain dan untuk membuktikan suatu kalimat himpunan.
40. Kalimat himpunan adalah pernyataan yang menggunakan notasi himpunan, atau dapat berupa kesamaan himpunan.
41. Untuk membuktikan kebenaran pada kesamaan himpunan dapat digunakan beberapa cara untuk memperoleh kesimpulan benar, yaitu: menggunakan diagram Venn, aljabar himpunan, definisi himpunan, dan tabel kebenaran.
42. Diagram Venn tidak dianggap sebagai metode yang valid untuk pembuktian secara formal.

B. Tes Formatif

1. Diketahui $S = \{x \mid x < 10, x \in \mathbb{N}\}$, $A = \{2, 4, 8, 10\}$, dan $B = \{1, 4, 5, 7\}$
 - a. Tuliskan langkah-langkah menggambarkan diagram *Venn* dari himpunan-himpunan di atas dalam satu gambar?
 - b. Bagaimana cara menentukan hasil dari $(A \cup B) - B$? Sertakan penjelasan!
 - c. Tentukan hasil dari $(A \oplus B) - A$? Apa kesimpulan yang dapat diperoleh?
2. Misalkan A adalah himpunan. Periksa kebenaran dari setiap pernyataan di bawah ini dengan menyertakan alasan!
 - (a) $A \cap p(A) = p(A)$
 - (b) $A \cup p(A) = p(A)$
 - (c) $A - p(A) = A$
 - (d) $A \in p(A)$
 - (e) $A \subseteq p(A)$
3. Bagaimana cara membuktikan $(A \cap B) \subset A$? Berikan penjelasanmu!
4. Tuliskan langkah-langkah menunjukkan $A \cap (A \cup B) = A$. Periksa kembali jawabanmu! Apakah persamaan tersebut benar atau salah?



5. Misalkan A , B , dan C adalah himpunan. Bagaimana cara menentukan hasil dari operasi himpunan berikut! Konsep apa yang digunakan! Berikan alasan yang mendasari jawaban!
- $(A \cap B) \cup (A^c \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B^c)$
 - $(A \cup B) \cap (A^c \cup B) \cap (A \cup B^c) \cap (A^c \cup B^c)$
6. Misalkan A adalah himpunan bagian dari himpunan semesta (U). Tuliskan hasil dari operasi beda-setangkup berikut:
- $A \oplus S$
 - $A \oplus A^c$
 - $A^c \oplus S$
7. Misalkan A dan B himpunan. Buktikan bahwa:
- $A \cup (B - A) = A \cup B$
 - $A - (A - B) = A \cap B$
8. Dari survei terhadap 270 orang didapatkan hasil sebagai berikut:
- 64 suka donat,
 - 94 suka bolu,
 - 58 suka kacang,
 - 26 suka donat dan bolu,
 - 28 suka donat dan kacang,
 - 22 suka bolu dan kacang,
 - 14 suka ketiga jenis makanan tersebut.
- Berapa orang tidak suka makan semua jenis makananyang disebutkan di atas ?
9. Diketahui pada sebuah SMK, 60 persen diantara para gurunya bermain tenis, 50 persen bermain catur, 70 persen bermain jogging, 20 persen bermain tenis dan catur, 30 persen bermain tenis dan jogging, dan 40 persen bermain catur dan jogging. Jika seseorang mengatakan bahwa 20 persen para guru bermain ketiganya, percayakah Anda? Mengapa?



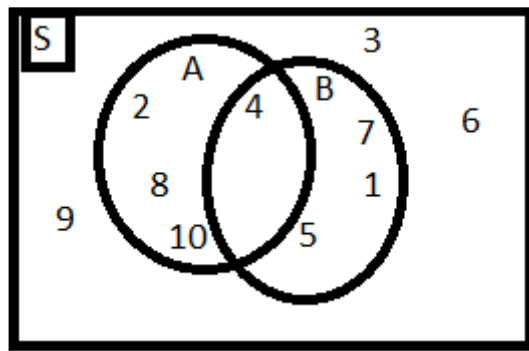
10. Terdapat bilangan bulat antara 501 sampai 1000. Bagaimana cara menentukan bilangan bulat tersebut yang tidak habis dibagi 3 atau 5? Berikan penjelasan yang mendasari jawaban!

C. Kunci Jawaban

1. Diketahui $S = \{x \mid x \leq 10, x \in \mathbb{N}\}$, $A = \{2, 4, 8, 10\}$ dan $B = \{1, 4, 5, 7\}$

a. Diagram Venn:

tidak bisa dituliskan anggota-anggotanya, karena jumlah anggota C tak



- b. $(A \cap B) \cup A^c = \{4\} \cup \{1, 3, 5, 6, 7, 9\} = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$
- c. $(A - B) \oplus A = \{2, 8, 10\} \oplus \{2, 4, 8, 10\} = \{4\}$
2. Berdasarkan definisi dan sifat-sifat himpunan, maka:
- (a) salah, seharusnya $A \cap p(A) = \emptyset$
- (b) benar
- (c) benar
- (d) salah, seharusnya $\{A\} \subseteq p(A)$
- (e) salah, seharusnya $A \in p(A)$
3. Jawab: Ambil $t \in A \cap B$ sebarang. Jelas bahwa $t \in A$. Dengan demikian setiap elemen di $A \cap B$ pasti juga berada di A. Jadi $(A \cap B) \subset A$



4. Bukti: dengan menggunakan definisi himpunan (Anda dapat juga menggunakan tabel kebenaran atau cara lainnya).

Untuk membuktikan $A \cap (A \cup B) = A$, harus dibuktikan bahwa $A \cap (A \cup B) \subset A$ dan $A \subset A \cap (A \cup B)$. Ambil $x \in A \cap (A \cup B)$ sebarang. Maka jelas bahwa $x \in A$. Berarti $A \cap (A \cup B) \subset A$ (*). Selanjutnya ambil $t \in A$ sebarang. Maka t jelas anggota A . Disamping itu t pasti anggota dari $A \cup B$ (lihat pengertian $A \cup B$). Akibatnya $t \in A \cap (A \cup B)$. Berarti $A \subset A \cap (A \cup B)$. (**). Dari (*) dan (**) diperoleh $A \cap (A \cup B) = A$.

5a

$$\begin{aligned}
 & (A \cap B) \cup (A^c \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B^c) \\
 &= B \cap (A \cup A^c) \cup B^c \cap (A \cap A^c) && \text{Hukum Distributif} \\
 &= (B \cap S) \cup (B^c \cap S) && [\text{Hukum Komplemen}] \\
 &= S \cap (B \cup B^c) && \text{Hukum Distributif} \\
 &= S \cap S && \text{Hukum komplemen} \\
 &= S && \text{Hukum idempoten}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b. } & (A \cup B) \cap (A^c \cup B) \cap (A \cup B^c) \cap (A^c \cup B^c) \\
 &= \emptyset \quad [\text{Hukum/Prinsip Dualitas dari jawaban a}]
 \end{aligned}$$

6.a. Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
 \text{(a) } A \oplus S &= (A - S) \cup (S - A) && (\text{Definisi operasi beda setangkup}) \\
 &= (\emptyset) \cup A^c && (\text{Definisi operasi selisih}) \\
 &= A^c && (\text{Hukum Identitas})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b) } A \oplus A &= (A - A) \cup (A^c - A) && (\text{Definisi operasi beda setangkup}) \\
 &= (A \cap A) \cup (A^c \cap A^c) && (\text{Definisi operasi selisih}) \\
 &= A \cup A^c && (\text{Hukum Idempoten}) \\
 &= S && (\text{Hukum Komplemen})
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
(c) \quad A^c \oplus S &= (A^c \cup S) - (A^c \cap S) \quad (\text{Definisi operasi beda setangkup}) \\
&= S - A^c \quad (\text{Hukum Null dan Hukum Identitas}) \\
&= A \quad (\text{Definisi operasi selisih})
\end{aligned}$$

7. Bukti, menggunakan operasi aljabar himpunan. (Anda dapat juga menggunakan tiga cara lainnya).

a. Bukti:

$$\begin{aligned}
A \cup (B - A) &= A \cup (B \cap A^c) \quad (\text{Definisi operasi selisih}) \\
&= (A \cup B) \cap (A \cup A^c) \quad (\text{Hukum distributif}) \\
&= (A \cup B) \cap S \quad (\text{Hukum komplemen}) \\
&= A \cup B \quad (\text{Hukum identitas})
\end{aligned}$$

b. Misalkan A dan B adalah himpunan. Maka:

$$\begin{aligned}
A - (A - B) &= A \cap B \\
A \cap (A \cap B^c)^c &= A \cap B \quad (\text{beda simetri}) \\
A \cap (A^c \cup B) &= A \cap B \quad (\text{de Morgan}) \\
(A \cap A^c) \cup (A \cap B) &= A \cap B \quad (\text{distributif}) \\
\emptyset \cup (A \cap B) &= A \cap B \quad (\text{komplementasi}) \\
A \cap B &= A \cap B \rightarrow (\text{terbukti})
\end{aligned}$$

8. Misalkan:

$A = \{\text{orang yang suka donat}\}$

$B = \{\text{orang yang suka bolu}\}$

$C = \{\text{orang yang suka kacang}\}$

$$\begin{aligned}
|A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\
&= 64 + 94 + 58 - 26 - 28 - 22 + 14 = 154
\end{aligned}$$

Jadi mereka yang tidak suka ketiga jenis makanan tersebut ada sebanyak $270 - 154 = 116$ orang.



9. Misalkan:

T = guru bermain tenis

C = guru bermain catur

J = guru bermain jogging

Diket.

$$|T| = 60, |C| = 50, |J| = 70,$$

$$|T \cap C| = 20, |T \cap J| = 30, |C \cap J| = 40, |T \cup C \cup J| = 100$$

$$|T| + |C| + |J| - |T \cap C| - |T \cap J| - |C \cap J| + |T \cap C \cap J|$$

$$= 60 + 50 + 70 - 20 - 30 - 40 + |T \cap C \cap J| = 100$$

$$|T \cap C \cap J| = 100 - 90 = 10$$

Jadi yang mengatakan 20 persen para guru bermain ketiganya adalah salah, sebab seharusnya 10 persen.

10. Misalkan:

Z = himpunan bilangan bulat

$$A = \{x \mid x \in Z, 501 \leq x \leq 1000, x \text{ habis dibagi } 3\}$$

$$B = \{x \mid x \in Z, 501 \leq x \leq 1000, x \text{ habis dibagi } 5\}$$

Maka, banyaknya bilangan bulat antara 501 sampai 1000 yang tidak habis dibagi 3 atau 5 dapat dinotasikan dengan $|S| - |A \cup B|$ dengan $|S|$ menyatakan banyaknya bilangan bulat di antara 501 sampai 1000

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$= (\lfloor 1000 / 3 \rfloor - \lfloor 500 / 3 \rfloor) + (\lfloor 1000 / 5 \rfloor - \lfloor 500 / 5 \rfloor)$$

$$- (\lfloor 1000 / (3 * 5) \rfloor - \lfloor 500 / (3 * 5) \rfloor)$$

$$= 167 + 100 - 33$$

$$= 234$$

Sehingga:

$$|S| - |A \cup B| = 500 - 234 = 266$$

Jadi, banyaknya bilangan bulat antara 501 sampai 1000 yang tidak habis dibagi 3 atau 5 adalah 266 bilangan.



KEGIATAN PEMBELAJARAN 3

Kegiatan Belajar 3 : Teori *Graph*

Pengantar

Dalam kegiatan ini akan dibahas mengenai sejarah perkembangan teori *graph* dan memahami definisi, terminologi dan jenis-jenis *graph*, memahami keterhubungan, matriks ketetanggaan-bersisian lintasan Euler-Hamilton, isomorfik-homeomorfik dari suatu *graph*. Setelah mempelajari materi ini, peserta diharapkan dapat menerapkan dalam soal-soal kejuruan dan dalam kehidupan sehari-hari

A. Tujuan

Tujuan dari penulisan modul ini adalah:

1. Melalui pengamatan dan penugasan peserta diklat dapat memahami sejarah perkembangan teori *graph* dengan tepat.
2. Melalui ceramah dan tanya jawab peserta diklat dapat memahami definisi, terminologi, dan jenis-jenis *graph* dengan benar.
3. Melalui penugasan dan diskusi kelompok peserta diklat dapat memahami keterhubungan, matriks ketetanggaan-bersisian, lintasan Euler-Hamilton, isomorfik-homeomorfik dari suatu *graph* dengan tepat.
4. Melalui penugasan dan diskusi kelompok peserta diklat dapat menyelesaikan persoalan sehari-hari yang berkaitan dengan teori *graph* dengan tepat.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Indikator pencapaian kompetensi yang harus dikuasai setelah mengikuti kegiatan belajar ini adalah, peserta diklat dapat:

1. Mengetahui sejarah perkembangan teori *graph*
2. Memahami definisi, terminologi, dan jenis-jenis *graph*.
3. Memahami keterhubungan, matriks ketetanggaan-bersisian, lintasan Euler-Hamilton, isomorfik-homeomorfik dari suatu *graph*.
4. Menyelesaikan persoalan sehari-hari yang berkaitan dengan teori *graph*



C. Uraian Materi

1. Pengantar dan Sejarah Singkat

Teori *graph* lahir pada tahun 1736 melalui tulisan Euler yang berisi tentang upaya pemecahan masalah jembatan Königsberg yang sangat terkenal di Eropa. Kurang lebih seratus tahun setelah lahirnya tulisan Euler tersebut tidak ada perkembangan yang berarti berkenaan dengan teori *graph*. Tahun 1847, G.R. Kirchhoff (1824 – 1887) berhasil mengembangkan teori pohon (*Theory of trees*) yang digunakan dalam persoalan jaringan listrik. Sepuluh tahun kemudian, A. Cooley (1821 – 1895) juga menggunakan konsep pohon untuk menjelaskan permasalahan kimia yaitu hidrokarbon. Pada masa Kirchhoff dan Cooley juga telah lahir dua hal penting dalam teori *graph*. Salah satunya berkenaan dengan konjektur empat warna, yang menyatakan bahwa untuk mewarnai sebuah atlas cukup dengan menggunakan empat macam warna sedemikian hingga tiap negara yang berbatasan akan memiliki warna yang berbeda. Para ahli teori *graph* berkeyakinan bahwa orang yang pertama kali mengemukakan masalah empat warna adalah A.F. Mobius (1790 – 1868) dalam salah satu kuliahnya di tahun 1840. Sepuluh tahun kemudian, A. De Morgan (1806 – 1871) kembali membahas masalah ini bersama ahli-ahli matematika lainnya di kota London. Dengan demikian tulisan De Morgan dianggap sebagai referensi pertama berkenaan dengan masalah empat warna. Masalah empat warna ini menjadi sangat terkenal setelah Cooley mempublikasikannya tahun 1879 dalam *Proceedings of the Royal Geographic Society* volume pertama. Hal lain yang penting untuk dibicarakan sehubungan dengan perkembangan teori *graph* adalah apa yang dikemukakan oleh Sir W.R. Hamilton (1805 – 1865). Pada tahun 1859 dia berhasil menemukan suatu permainan yang kemudian dijualnya ke sebuah pabrik mainan di Dublin. Permainan tersebut terbuat dari kayu berbentuk dodecahedron beraturan yakni berupa sebuah polihedron dengan 12 muka dan 20 pojok. Tiap muka berbentuk sebuah pentagon beraturan dan tiap pojoknya dibentuk oleh tigasisi berbeda. Tiap pojok dari dodecahedron tersebut dipasangkan dengan sebuah kota terkenal seperti London, New York, Paris, dan lain-lain. Masalah dalam permainan ini adalah, kita diminta untuk mencari suatu rute melalui sisi-sisi dari dodecahedron

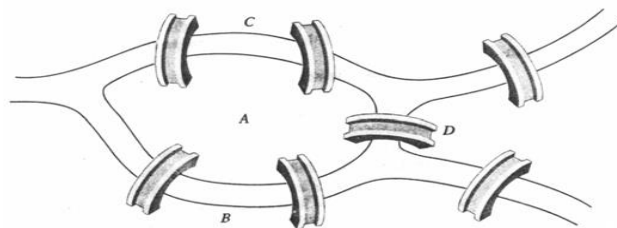


sehingga tiap kota dari 20 kota yang ada dapat dilalui tepat satu kali. Walaupun saat ini masalah tersebut dapat dikategorikan mudah, akan tetapi pada saat itu tidak ada seorang pun yang bisa menemukan syarat perlu dan cukup dari eksistensi rute yang dicari. Kurang lebih setengah abad setelah masa Hamilton, aktivitas dalam bidang teori *graph* dapat dikatakan relatif kecil. Pada tahun 1920-an kegiatan tersebut muncul kembali yang dipelopori oleh D. Konig. Konig berupaya mengumpulkan hasil-hasil pemikiran para ahli matematika tentang teori *graph* termasuk hasil pemikirannya sendiri, kemudian dikemasnya dalam bentuk buku yang diterbitkan pada tahun 1936. Buku tersebut dianggap sebagai buku pertama tentang teori *graph*. Tiga puluh tahun terakhir ini merupakan periode yang sangat intensif dalam aktivitas pengembangan teori *graph* baik murni maupun terapan. Sejumlah besar penelitian telah dilakukan, ribuan artikel telah diterbitkan dan lusinan buku telah banyak ditulis. Di antara orang terkenal yang banyak berkecimpung dalam bidang ini adalah Claude Berge, Oysten Ore, Paul Erdos, William Tutte, dan Frank Harary.

Teori *graph* merupakan pokok bahasan yang banyak penerapannya pada masa kini. Pemakaian teori *graph* telah banyak dirasakan dalam berbagai ilmu, antara lain : optimisasi jaringan, ekonomi, psikologi, genetika, riset operasi (OR), dan lain-lain. Makalah pertama tentang teori *graph* ditulis pada tahun 1736 oleh seorang matematikawan Swiss yang bernama Leonard Euler. Ia menggunakan teori *graph* untuk menyelesaikan masalah jembatan Königsberg (sekarang, bernama Kaliningrad). Berikut adalah ilustrasi masalah tersebut :

Gambar 2.4.1

Masalah Jembatan Königsberg (Rossen, 2003)

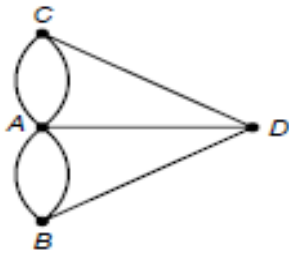




Masalah yang dikemukakan Euler : Dapatkah melewati setiap jembatan tepat sekali dan kembali lagi ke tempat semula? Berikut adalah sketsa yang merepresentasikan ilustrasi jembatan Königsberg yang pada gambar diatas. Himpunan titik yaitu $\{A, B, C, D\}$ merepresentasikan sebagai daratan, dan garis yang menghubungkan titik-titik tersebut adalah sebagai jembatan.

Gambar 2.4.2

Representasi *graph* masalah jembatan Königsberg



Jawaban pertanyaan Euler adalah tidak mungkin. Agar bisa melalui setiap jembatan tepat sekali dan kembali lagi ke tempat semula maka jumlah jembatan yang menghubungkan setiap daratan harus genap.

2. Definisi *Graph*

Graph merupakan struktur diskrit yang terdiri himpunan sejumlah berhingga obyek yang disebut simpul (*vertices*, *vertex*) dan himpunan sisi (*edges*) yang menghubungkan simpul-simpul tersebut. *Graph* digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut.

Notasi sebuah *graph* adalah $G = (V, E)$, dimana :

- V merupakan himpunan tak kosong dari simpul-simpul (*vertices*), misalkan $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$
- E merupakan himpunan sisi – sisi (*edges*) yang menghubungkan sepasang simpul, misalkan $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

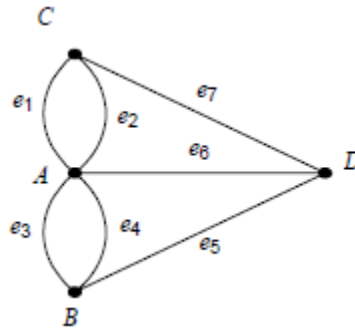


Contoh :

Graph dari masalah jembatan Königsberg dapat disajikan sebagai berikut :

Gambar 2.4.3

Graph masalah jembatan Königsberg



Misalkan *graph* tersebut adalah $G(V, E)$ dengan

$$V = \{ A, B, C, D \}$$

$$E = \{ (A, C), (A, C), (A, B), (A, B), (B, D), (A, D), (C, D) \}$$
$$= \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 \}$$

Pada *graph* tersebut sisi $e_1 = (A, C)$ dan sisi $e_2 = (A, C)$ dinamakan **sisi-ganda** (*multiple edges* atau *parallel edges*) karena kedua sisi ini menghubungkan dua buah simpul yang sama, yaitu simpul A dan simpul C. Begitu pun dengan sisi e_3 dan sisi e_4 . Sementara itu, pada *graph* diatas, tidak terdapat **gelang (loop)**, yaitu sisi yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama.

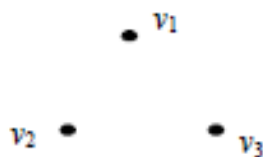
Dari definisi *graph*, himpunan sisi (E) memungkinkan berupa himpunan kosong. Jika *graph* tersebut mempunyai himpunan sisi yang merupakan himpunan kosong maka *graph* tersebut dinamakan *graph* kosong (*null graph* atau *empty graph*).

Contoh :

Graph kosong dengan 3 simpul ($graph N_3$)

Gambar 2.4.4

Graphkosong dengan 3 simpul





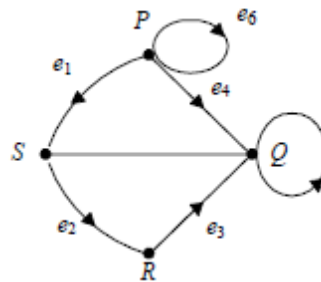
Dengan memperhatikan kondisi sisinya, suatu *graph* dapat dikategorikan sebagai *graph* tidak berarah dan *graph* berarah. *Graph* tidak berarah, seperti telah dijelaskan pada contoh *graph* untuk jembatan Königsberg. Sementara itu, ***graph* berarah (*directed graph*, *digraph*)** merupakan *graph* yang mempunyai sisi yang berarah, artinya satu buah simpul yang dihubungkan oleh sisi tersebut merupakan simpul awal (*initial vertex*) dan simpul yang lain dikatakan sebagai simpul akhir (*terminal vertex*).

Contoh :

Graph berikut merupakan *graph* berarah :

Gambar 2.4.5

*Graph*berarah



Terlihat bahwa $e_1 = (P, S)$, $e_3 = (R, Q)$, dan $e_5 = (S, Q)$

Simpul P merupakan simpul awal bagi sisi e_1 dan simpul S merupakan simpul akhir bagi sisi e_1 .

3. Terminologi *Graph*

Ada beberapa terminologi *graph* yang perlu diketahui, antara lain : ketetanggaan antara dua simpul, bersisian, derajat suatu simpul, dan lain-lain. Berikut ini adalah beberapa terminologi yang penting, yaitu :

a. Bertetangga (*Adjacent*)

Dua buah simpul dikatakan *bertetangga* jika kedua simpul tersebut terhubung langsung oleh suatu sisi.

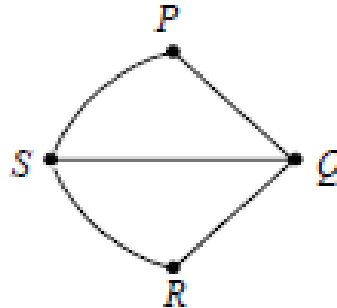
Contoh :

Perhatikan *graph* berikut :



Gambar 2.4.6

Graph bertetangga



Pada *graph* diatas : simpul P bertetangga dengan simpul Q dan S, tetapi simpul P tidak bertetangga dengan simpul R.

b. Bersisian (*Incidency*)

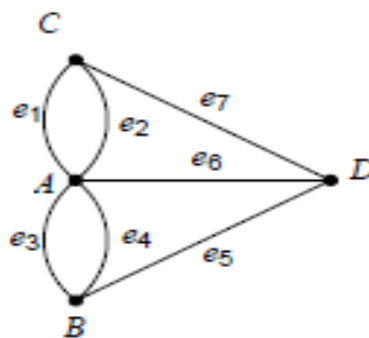
Suatu sisi e dikatakan bersisian dengan simpul v_1 dan simpul v_2 jika e menghubungkan kedua simpul tersebut, dengan kata lain $e = (v_1, v_2)$.

Contoh :

Perhatikan *graph* dari masalah jembatan Königsberg berikut ini :

Gambar 2.4.7

Graph bersisian



maka e_1 bersisian dengan simpul A dan simpul C , tetapi sisi tersebut tidak bersisian dengan simpul B.



c. Simpul Terpencil (*Isolated Vertex*)

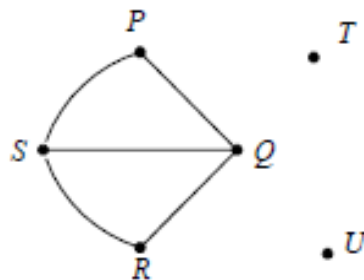
Jika suatu simpul tidak mempunyai sisi yang bersisian dengannya maka simpul tersebut dinamakan simpul terpencil.

Contoh :

Perhatikan *graph* berikut :

Gambar 2.4.8

Graph terpencil



Simpul T dan simpul U merupakan simpul terpencil.

d. Derajat (*Degree*)

Derajat suatu simpul merupakan jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut.

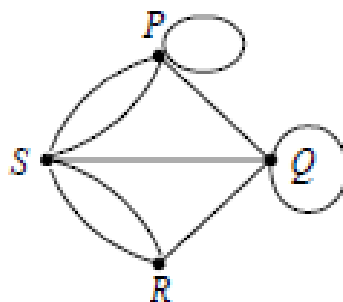
Misalkan, suatu simpul v mempunyai 3 buah sisi yang bersisian dengannya maka dapat dikatakan simpul tersebut berderajat 3, atau dinotasikan oleh $d(v) = 3$.

Contoh:

Perhatikan *graph* berikut :

Gambar 2.4.9

Graph berderajat





Pada *graph* diatas :

$d(P) = d(Q) = d(S) = 5$, sedangkan $d(R) = 3$.

Derajat sebuah simpul pada suatu *graph* berarah dijelaskan sebagai berikut :

- $d_{in}(v)$ merupakan jumlah busur yang masuk ke simpul v
- $d_{out}(v)$ merupakan jumlah busur yang keluar dari simpul v

Dengan demikian derajat pada simpul tersebut, diperoleh :

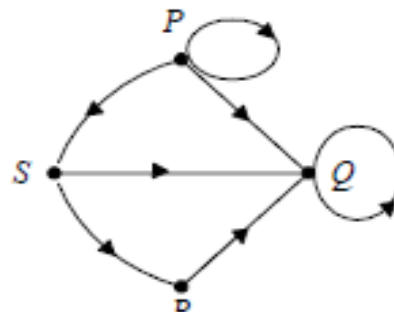
$$d(v) = d_{in}(v) + d_{out}(v)$$

Contoh :

Perhatikan *graph* berarah berikut ini :

Gambar 2.4.10

Graph berderajat genap



Pada *graph* diatas :

$d_{in}(P) = 1$ dan $d_{out}(P) = 3$ maka $d(P) = 4$

$d_{in}(Q) = 4$ dan $d_{out}(Q) = 1$ maka $d(Q) = 5$

$d_{in}(R) = 1$ dan $d_{out}(R) = 1$ maka $d(R) = 2$

$d_{in}(S) = 1$ dan $d_{out}(S) = 2$ maka $d(S) = 3$

Jumlah derajat semua simpul pada suatu *graph* adalah genap, yaitu dua kali jumlah sisi pada *graph* tersebut. Jika $G = (V, E)$ merupakan suatu *graph*, maka dapat ditulis :

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |E|$$

Contoh 2:

Perhatikan *graph* pada gambar 2.4.9. Jumlah sisi pada *graph* tersebut adalah 9, sehingga Jumlah derajat pada *graph* tersebut adalah :

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V} d(v) &= 2 \cdot |E| \\ &= 2 \cdot 9 = 18 \end{aligned}$$



Atau:

$$\begin{aligned}\sum_{v \in V} d(v) &= d(P) + d(Q) + d(S) + d(R) \\ &= 5 + 5 + 5 + 3 = 18\end{aligned}$$

Perhatikan *graph* pada gambar 2.4.10.

Jumlah sisi pada *graph* tersebut adalah 7, sehingga jumlah derajat pada *graph* tersebut adalah :

$$\begin{aligned}\sum_{v \in V} d(v) &= 2 \cdot |E| \\ &= 2 \cdot 7 = 14\end{aligned}$$

Atau:

$$\begin{aligned}\sum_{v \in V} d(v) &= d(P) + d(Q) + d(R) + d(S) \\ &= 4 + 5 + 2 + 3 \\ &= 14\end{aligned}$$

Dengan demikian, jika kita ingin menggambar sebuah *graph* dengan derajat masing-masing simpul diketahui, dan ternyata jumlah derajat seluruh simpul tersebut adalah ganjil maka hal ini tak mungkin terjadi.

e. Lintasan (*Path*)

Lintasan dari suatu simpul awal v_0 ke simpul tujuan v_T di dalam suatu *graph* G merupakan barisan sebuah sisi atau lebih $(x_0, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_{n-1}, x_n)$ pada G , dimana $x_0 = v_0$ dan $x_n = v_T$. Lintasan ini dinotasikan oleh :

$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$

Lintasan ini mempunyai panjang n , karena lintasan ini memuat n buah sisi, yang dilewati dari suatu simpul awal v_0 ke simpul tujuan v_T di dalam suatu *graph* G . Suatu lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama dinamakan Siklus (Cycle) atau Sirkuit (Circuit).

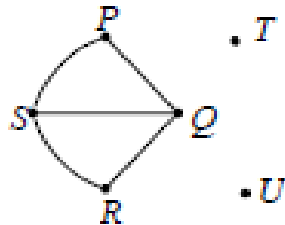


Contoh :

Perhatikan *graph* berikut ini :

Gambar 2.4.11

Graph dengan lintasan



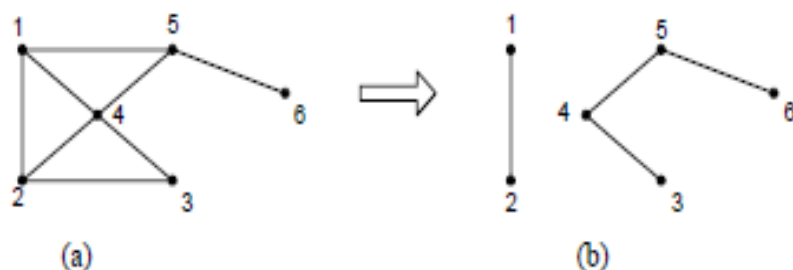
- Pada *graph* tersebut lintasan P, Q, R memiliki panjang 2. Sementara itu lintasan P, Q, S, R memiliki panjang 3.
- Lintasan P, Q, R, S, P dinamakan siklus atau sirkuit dengan panjang 4.
- Antara simpul P dan U maupun T tidak dapat ditemukan lintasan.

f. Cut-Set

Cut-set dari suatu *graph* terhubung G adalah himpunan sisi yang jika dibuang dari G menyebabkan G tidak terhubung. Jadi, cut-set selalu menghasilkan dua buah subgraph. Pada *graph* di bawah, $\{(1,4), (1,5), (2,3), (2,4)\}$ adalah cut-set. Terdapat banyak cut-set pada sebuah *graph* terhubung. Himpunan $\{(1,5), (4,5)\}$ juga adalah cut-set, $\{(1,4), (1,5), (1,2)\}$ adalah cut-set, $\{(5,6)\}$ juga cut-set, tetapi $\{(1,4), (1,5), (4,5)\}$ bukan cut-set sebab himpunan bagiannya, $\{(1,5), (4,5)\}$ adalah *cut-set*.

Gambar 2.4.12

cut-set





4. Beberapa Jenis *Graph*

Beberapa jenis *graph* tak berarah yang perlu diketahui adalah :

1) *Graph sederhana (simple graph)*.

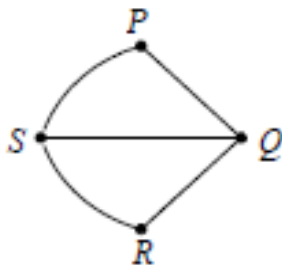
Graph sederhana merupakan *graph* tak berarah yang tidak mengandung gelang maupun sisi-ganda.

Contoh :

Graph sederhana

Gambar 2.4.13

Graph sederhana



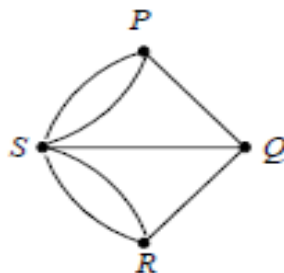
2) *Graph Ganda (multigraph)*.

Graph ganda merupakan *graph* tak berarah yang tidak mengandung gelang (loop).

Contoh :

Gambar 2.4.14

Graph ganda



Dengan demikian, *graph* sederhana pun merupakan *graph* ganda (*multigraph*).

3) *Graph semu (Pseudo graph)*

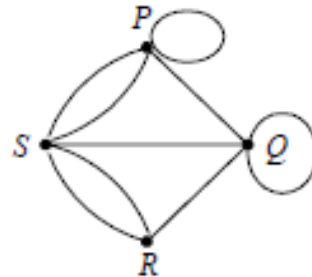
Graph semu merupakan *graph* yang boleh mengandung gelang (*loop*).

Contoh :



Gambar 2.4.15

Graph semu



Beberapa jenis *graph* berarah yang perlu diketahui adalah :

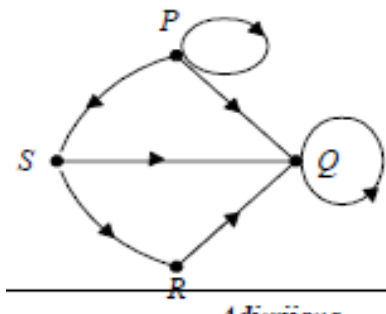
1. *Graph* berarah (*directed graph* atau *digraph*).

Graph berarah merupakan *graph* yang setiap sisinya mempunyai arah dan tidak mempunyai dua sisi yang berlawanan antara dua buah simpul (tak mempunyai sisi ganda).

Contoh :

Gambar 2.4.16

Graph berarah



2. *Graph* ganda berarah (*directed multigraph*).

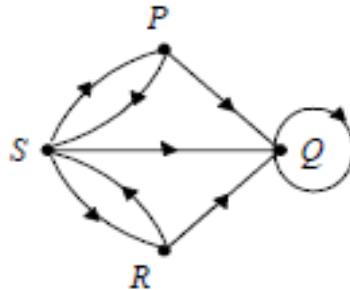
Graph ganda berarah merupakan *graph* berarah yang membolehkan adanya sisi ganda pada *graph* tersebut (boleh mempunyai dua sisi yang berlawanan antara dua buah simpul).



Contoh:

Gambar 2.4.17

Graph ganda berarah



Dari jenis-jenis *graph* yang telah dijelaskan di atas, kita dapat membuat ringkasan (sebagai bahan perbandingan), sebagai berikut :

Tabel 3.1

Jenis-jenis *graph* [Rosen, 2003]

Jenis	Sisi	Sisi ganda dibolehkan?	Gelang (loop) dibolehkan?
<i>Graph</i> sederhana	Tak-berarah	Tidak	Tidak
<i>Graph</i> ganda	Tak-berarah	Ya	Tidak
<i>Graph</i> semu	Tak-berarah	Ya	Ya
<i>Graph</i> berarah	Bearah	Tidak	Ya
<i>Graph</i> ganda berarah	Bearah	Ya	Ya

Berikut ini adalah beberapa jenis dari *graph* yang perlu diketahui :

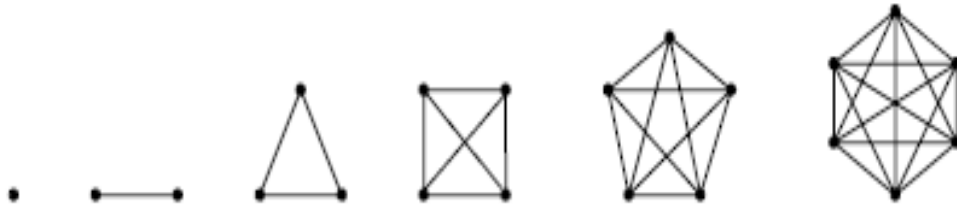
a. *Graph* Lengkap (*Complete Graph*)

Graph lengkap merupakan *graph* sederhana yang setiap simpulnya terhubung (oleh satu sisi) ke semua simpul lainnya. Dengan kata lain, setiap simpulnya bertetangga. *Graph* lengkap dengan n buah simpul dilambangkan dengan K_n . Jumlah sisi pada sebuah *graph* lengkap yang terdiri dari n buah simpul adalah $n(n - 1)/2$ sisi.



Contoh :

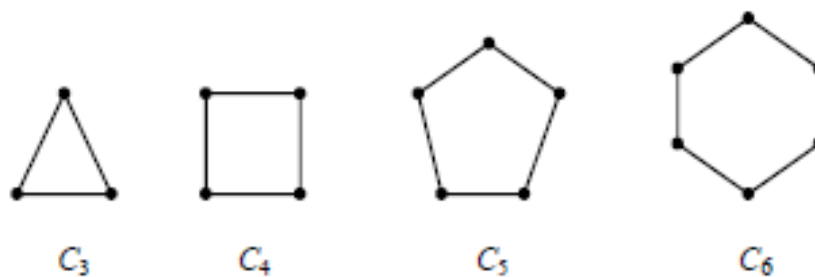
Gambar 2.4.18 **Grap lengkap K_n , $1 \leq n \leq 6$ (Rosen, 2003)**



b. Graph Lingkaran (Cycle Graph)

Graph lingkaran merupakan *graph* sederhana yang setiap simpulnya berderajat dua. *Graph* lingkaran dengan n simpul dilambangkan dengan C_n .

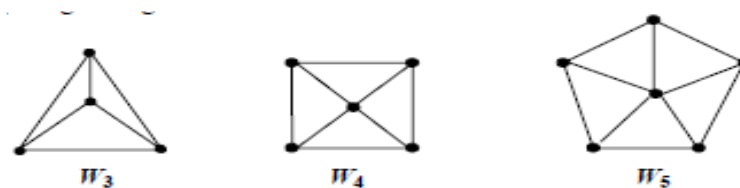
Gambar 2.4.19 **Graph lingkaran**



c. Graph Roda (Wheels Graph)

Graph roda merupakan *graph* yang diperoleh dengan cara menambahkan satu simpul pada *graph* lingkaran C_n , dan menghubungkan simpul baru tersebut dengan semua simpul pada *graph* lingkaran tersebut.

Gambar 2.4.20 **Graphroda**



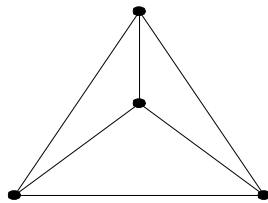


d. *Graph* Teratur (*Regular Graphs*)

Graph teratur merupakan *graph* yang setiap simpulnya mempunyai derajat yang sama. Apabila derajat setiap simpul pada *grap* teratur adalah r , maka *graph* tersebut

dinamakan *graph* teratur berderajat r . Jumlah sisi pada *graph* teratur dengan n simpul adalah $\frac{nr}{2}$ sisi.

Gambar 2.4.21 *Graph* Reguler dengan Empat Simpul Berderajat 2 (Munir, 2003)



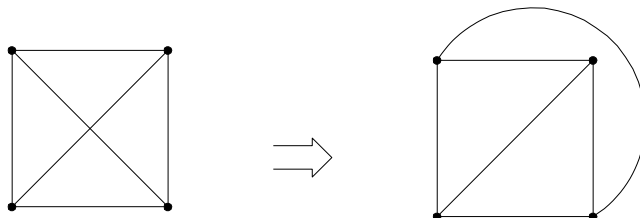
e. *Graph* Planar (*Planar Graph*) dan *Graph* Bidang (*Plane Graph*)

Graph yang **dapat** digambarkan pada bidang datar dengan sisi-sisi yang tidak saling berpotongan dinamakan ***graph* planar**. Jika tidak, maka *graph* tersebut dinamakan ***graph* tak-planar**.

Contoh 1 :

- Semua *graph* lingkaran merupakan *graph* planar
 - *Graph* lengkap K_1, K_2, K_3, K_4 merupakan *graph* planar
- Tetapi *graph* lengkap K_n untuk $n \geq 5$ merupakan *graph* tak-planar. Ilustrasi untuk *graph* planar K_4 .

Gambar 2.4.22 K_4 adalah *graph* planar (Munir, 2003)

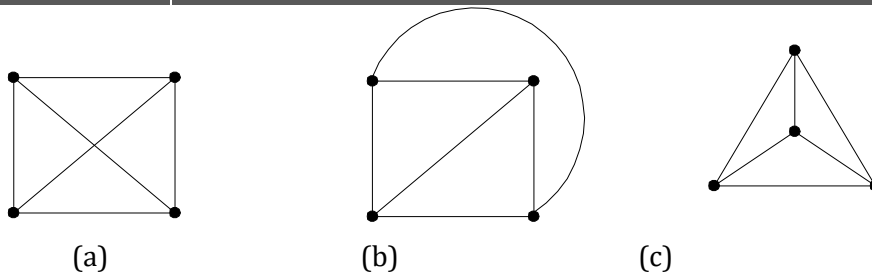




Graph planar yang digambarkan dengan sisi-sisi yang tidak saling berpotongan dinamakan **graph bidang** (*plane graph*).

Contoh 2 :

Gambar 2.4.23 Tiga buah *graph* planar.

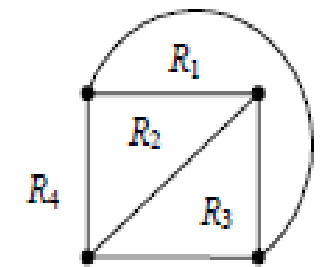


Graph (b) dan (c) adalah *graph* bidang (**Munir**, 2003)

Contoh 3 :

Perhatikan ilustrasi *graph* planar berikut ini :

Gambar 2.4.24 *Graph* planar 4 buah daerah



makagraph planar diatas dikatakan terdiri dari 4 buah daerah.

Beberapa hal tentang *graph* planar $G(V, E)$, antara lain :

- **(Formula Euler)** Misalkan G merupakan *graph* planar terhubung dengan e buah sisi dan v buah simpul, dan r merupakan jumlah daerah pada *graph* planar tersebut maka $r = e - v + 2$.
- Jika G merupakan *graph* planar terhubung dengan e buah sisi dan v buah simpul ($v \geq 3$) maka $e \leq 3v - 6$ (**ketaksamaan Euler**).



- Jika G merupakan *graph* planar terhubung dengan e buah sisi dan v buah simpul ($v \geq 3$) dan tidak memuat sirkuit dengan panjang 3 maka $e \leq 2v - 4$.

f. *Graph* Bipartit (*Bipartite Graph*)

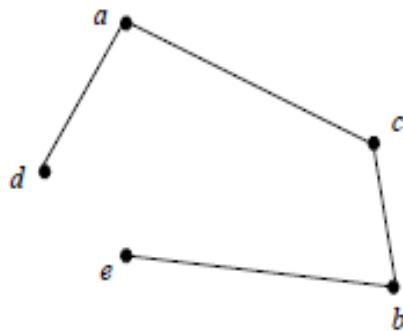
Sebuah *graph* sederhana G dikatakan **graph bipartit** jika himpunan simpul pada *graph* tersebut dapat dipisah menjadi dua himpunan tak kosong yang *disjoint*, misalkan V_1 dan V_2 , sedemikian sehingga setiap sisi pada G menghubungkan sebuah simpul pada V_1 dan sebuah simpul pada V_2 . Dengan demikian, pada *graph* bipartit tidak ada sisi yang menghubungkan dua simpul pada V_1 atau V_2 . *Graph* bipartit tersebut dinotasikan oleh $G(V_1, V_2)$.

Contoh :

Graph G berikut merupakan *graph* bipartit :

Gambar 2.4.25

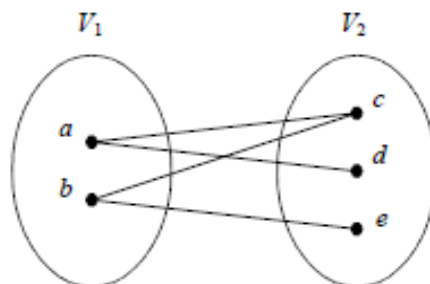
Graph bipartit



Graph diatas dapat direpresentasikan menjadi *graph* bipartit $G(V_1, V_2)$, dimana $V_1 = \{a, b\}$ dan $V_2 = \{c, d, e\}$

Gambar 2.4.26

Graph bipartit $G(V_1, V_2)$

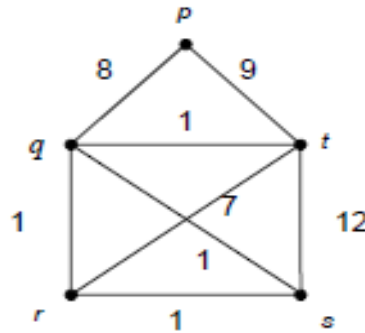




g. Graph Berbobot (Weighted Graph)

Graph berbobot adalah *graph* yang setiap sisinya diberi sebuah harga (bobot)

Gambar 2.4.27 *Graph berbobot*



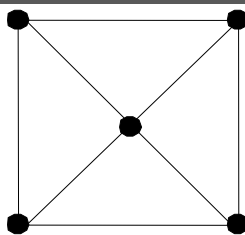
5. Keterhubungan dan Sub Graph

Dua buah simpul v_1 dan simpul v_2 pada suatu *graph* dikatakan **terhubung** jika terdapat lintasan dari v_1 ke v_2 . Jika setiap pasang simpul v_i dan v_j dalam himpunan V pada suatu *graph* G terdapat lintasan dari v_i ke v_j maka *graph* tersebut dinamakan **graph terhubung** (*connected graph*). Jika tidak, maka G dinamakan **graph tak-terhubung** (*disconnected graph*).

Contoh :

Graph roda merupakan salah satu contoh *graph* terhubung:

Gambar 2.4.28 *Graph terhubung*



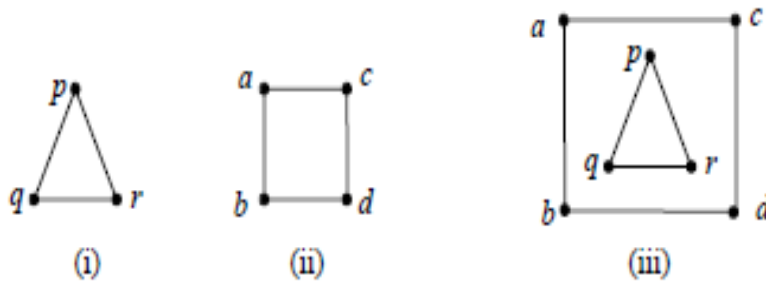
Contoh:

Perhatikan *graph* lingkaran berikut ini :



Gambar 2.4.29

Graph terhubung dan tak-terhubung



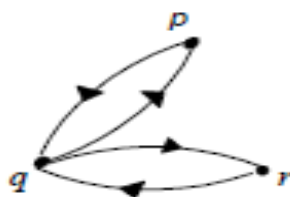
Jelas bahwa (i) C_3 dan (ii) C_4 merupakan *graph* terhubung. Sementara itu, *graph* (iii) merupakan *graph* tak-terhubung, karena tak ada lintasan yang menghubungkan simpul salah satu simpul pada $\{p, q, r\}$ dengan salah satu simpul pada $\{a, b, c, d\}$.

Selanjutnya, kita akan meninjau tentang keterhubungan pada suatu *graph* berarah. Suatu *graph* berarah G dikatakan terhubung jika kita menghilangkan arah pada *graph* tersebut (*graph* tak berarah) maka *graph* tersebut merupakan *graph* terhubung. Dua simpul, u dan v , pada *graph* berarah G disebut terhubung kuat (*strongly connected*) jika terdapat lintasan berarah dari u ke v dan juga lintasan berarah dari v ke u . Jika u dan v tidak terhubung kuat, dengan kata lain *graph* tersebut hanya terhubung pada *graph* tidak berarahnya, maka u dan v dikatakan terhubung lemah (*weakly connected*). Jika setiap pasangan simpul pada suatu *graph* berarah *graph* berarah G terhubung kuat maka *graph* G tersebut dinamakan *graph* terhubung kuat (*strongly connected graph*). Jika tidak, *graph* tersebut dinamakan *graph* terhubung lemah (*weakly connected graph*).

Contoh 1:

Gambar 2.4.30

Graph berarah terhubung kuat.

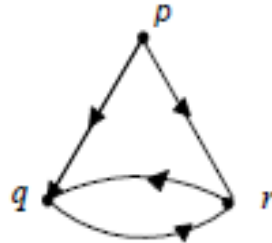




Contoh 2:

Gambar 2.4.31

Graph berarah terhubung lemah

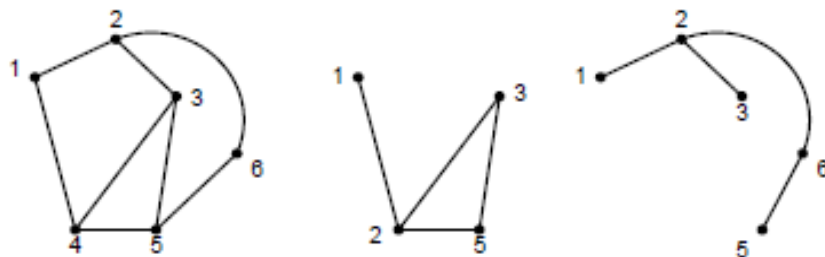


Misalkan $G = (V, E)$ merupakan suatu *graph*, maka $G_1 = (V_1, E_1)$ dinamakan sub *graph*(sub*graph*) dari G jika $V_1 \subseteq V$ dan $E_1 \subseteq E$. Komplemen dari sub *graph* G_1 terhadap *graph* G adalah *graph* $G_2 = (V_2, E_2)$ sedemikian sehingga $E_2 = E - E_1$ dan V_2 adalah himpunan simpul yang anggota-anggota E_2 bersisian dengannya.

Contoh :

Gambar 2.4.32

Sebuah sub*graph* dari suatu *graph* dan komplemennya (Munir, 2003)



(a) $GraphG_1$

(b) sub*graph*

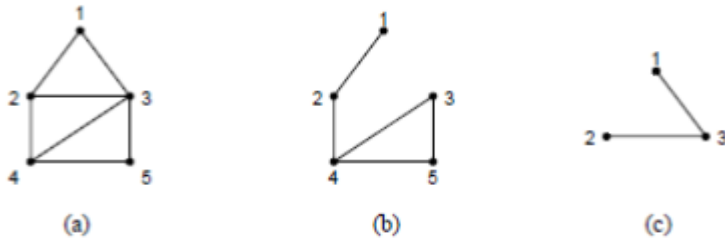
(c) komplemen dari sub*graph* (b)

Misalkan, $G_1 = (V_1, E_1)$ merupakan sub *graph* dari *graph* $G = (V, E)$. Jika $V_1 = V$ (yaitu G_1 memuat semua simpul dari G) maka G_1 dinamakan *Spanning Subgraph*(sub*graph* merentang).



Contoh :

Gambar 2.4.33 sketsa (b) merupakan *Spanning Subgraph* dari G , sedangkan (c) bukan *Spanning Subgraph* dari G (hanya komplemen dari subgraph (b)) (Munir, 2003)



6. Matriks Ketetanggaan (*adjacency matrix*) dan Matriks Bersisian (*incidency matrix*) dari Suatu Graph

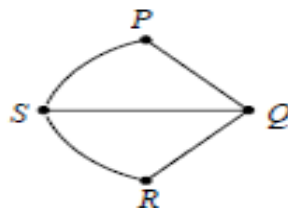
Pada pembahasan sebelumnya, kita telah memperkenalkan bahwa dua buah simpul dikatakan bertetangga jika kedua simpul tersebut terhubung langsung oleh suatu sisi. Matriks ketetanggaan untuk *graph* sederhana merupakan matriks bujur sangkar yang unsur-unsurnya hanya terdiri dari dua bilangan yaitu 0 (nol) dan 1 (satu). Baris dan kolom pada matriks ini, masing-masing merupakan representasi dari setiap simpul pada *graph* tersebut. Misalkan a_{ij} merupakan unsur pada matriks tersebut, maka :

- Jika $a_{ij} = 1$ maka hal ini berarti simpul i dan simpul j bertetangga.
- Jika $a_{ij} = 0$ maka hal ini berarti simpul i dan simpul j tidak bertetangga.

Contoh :

Perhatikan *graph* sederhana berikut ini :

Gambar 2.4.34 *Graph* sederhana PQRS





Matriks ketetanggaan dari *graph* tersebut adalah sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Terlihat bahwa matriks tersebut simetris dan setiap unsur diagonalnya adalah nol (0).

Matriks ketetanggaan untuk *graph* tak sederhana merupakan matriks bukur sangkar yang unsur-unsurnya hanya terdiri dari bilangan 0 (nol), 1 (satu) dan 2 (dua). Baris dan kolom pada matriks ini, masing-masing merupakan representasi dari setiap simpul pada *graph* tersebut. Misalkan a_{ij} merupakan unsur pada matriks tersebut, maka :

Jika $a_{ij} = n$ maka hal ini berarti simpul i dan simpul j bertetangga oleh n buah sisi.

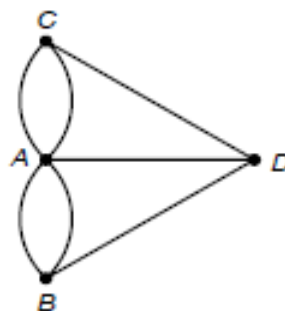
Jika $a_{ij} = 0$ maka hal ini berarti simpul i dan simpul j tidak bertetangga.

Contoh :

Perhatikan *graph* dari masalah jembatan Königsberg:

Gambar 2.4.35

Graph masalah jembatan Königsberg ABCD



Matriks ketetanggaan dari *graph* tersebut adalah sebagai berikut :



$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sementara itu, suatu sisi e dikatakan bersisian dengan simpul v_1 dan simpul v_2 jika e menghubungkan kedua simpul tersebut, dengan kata lain $e = (v_1, v_2)$. Seperti halnya matriks ketetanggaan, unsur-unsur matriks bersisian pun hanya terdiri dari dua bilangan yaitu 0 (nol) dan 1 (satu), tapi tidak harus bujur sangkar. Hal ini disebabkan, baris dan kolom pada matriks bersisian, masing-masing merepresentasikan simpul dan sisi pada *graph* yang dimaksud. Misalkan a_{ij} merupakan unsur pada matriks tersebut, maka :

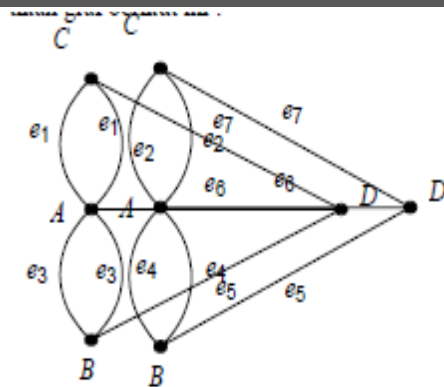
- Jika $a_{ij} = 1$ maka hal ini berarti simpul ke- i dan sisi ke- j adalah bersisian.
- Jika $a_{ij} = 0$ maka hal ini berarti simpul ke- i dan sisi ke- j tidak bersisian.

Contoh :

Perhatikan *graph* berikut ini:

Gambar 2.4.36

Graph matriks bersisian



Bentuk matriks bersisian dari *graph* tersebut adalah :

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



7. Lintasan dan Sirkuit Euler

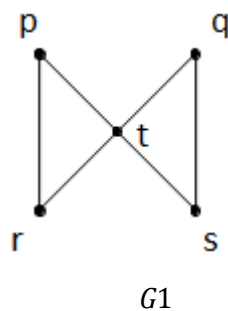
Lintasan Euler dalam suatu *graph* merupakan lintasan yang melalui masing-masing sisi didalam *graph* tersebut tepat satu kali. Jika lintasan tersebut kembali kesimpul awal, sehingga membentuk lintasan tertutup (sirkuit) maka lintasan ini dinamakan sirkuit Euler. Dengan demikian, sirkuit Euler merupakan sirkuit yang melewati masing-masing sisi tepat satu kali. *Graph* yang memuat sirkuit Euler dinamakan *graph* Euler (Eulerian *graph*), sedangkan *graph* yang memuat lintasan Euler dinamakan *graph* semi Euler (semi-Eulerian *graph*).

Contoh :

Perhatikan *graph* berikut ini :

Gambar 2.4.37

Graph Euler

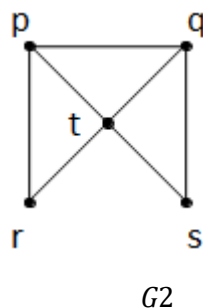


Graph G_1 merupakan *graph* Euler. karena memiliki lintasan yang membentuk lintasan tertutup (sirkuit), yaitu : $pr - rt - ts - sq - qt - tp$

Sementara itu,

Gambar 2.4.38

Graph semi Euler





Terlihat bahwa *graph* G_2 merupakan *graph* semi Euler karena *graph* tersebut memiliki lintasan yang melalui masing-masing sisi didalam *graph* tersebut tepat satu kali. Lintasan tersebut adalah : $pq - qs - st - tp - pr - rt - tq$.

Beberapa sifat tentang lintasan dan sirkuit Euler :

- Suatu *graph* G merupakan *graph* Euler (memiliki sirkuit Euler) jika dan hanya jika setiap simpul pada *graph* tersebut berderajat genap.
- *Graph* terhubung G merupakan *graph* semi Euler (memiliki lintasan Euler) jika dan hanya jika di dalam *graph* tersebut terdapat dua simpul berderajat ganjil.
- Suatu *graph* terhubung berarah G merupakan *graph* Euler (memiliki sirkuit Euler) jika dan hanya jika setiap simpul pada *graph* tersebut memiliki derajat masuk dan derajat keluar yang sama.
- Suatu *graph* terhubung berarah G merupakan *graph* semi Euler (memiliki lintasan Euler) jika dan hanya jika G terhubung setiap simpul pada *graph* tersebut memiliki derajat masuk dan derajat keluar yang sama, kecuali dua simpul yaitu simpul pertama (simpul awal lintasan) memiliki derajat keluar satu lebih besar dari pada derajat masuk dan simpul yang kedua (simpul akhir lintasan) memiliki derajat masuk satu lebih besar dari pada derajat keluar.

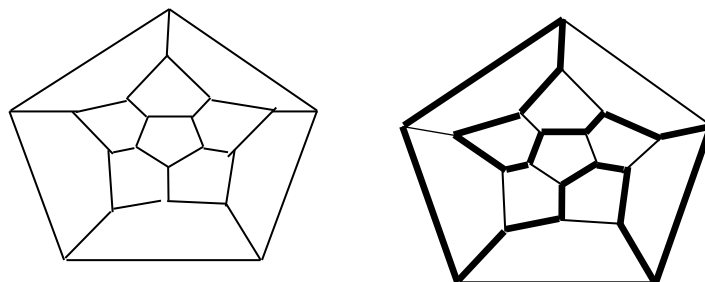
8. Lintasan dan Sirkuit Hamilton

Sir Wiliam Hamilton pada tahun 1859 membuat permainan dodecahedron yang ditawarkan pada pabrik mainan di Dublin. Permainan tersebut terdiri dari 12 buah pentagonal dan ada 20 titik sudut (setiap sudut diberi nama ibu kota setiap negara) . Permainan ini membentuk perjalanan keliling dunia yang mengunjungi setiap ibu kota Negara tepat satu kali dan kembali lagi ke kota asal. Ini tak lain adalah mencari sirkuit Hamilton.

Masalah tersebut dapat diilustrasikan dalam gambar berikut ini:

Gambar 2.4.39

Ilustrasi sirkuit Hamilton



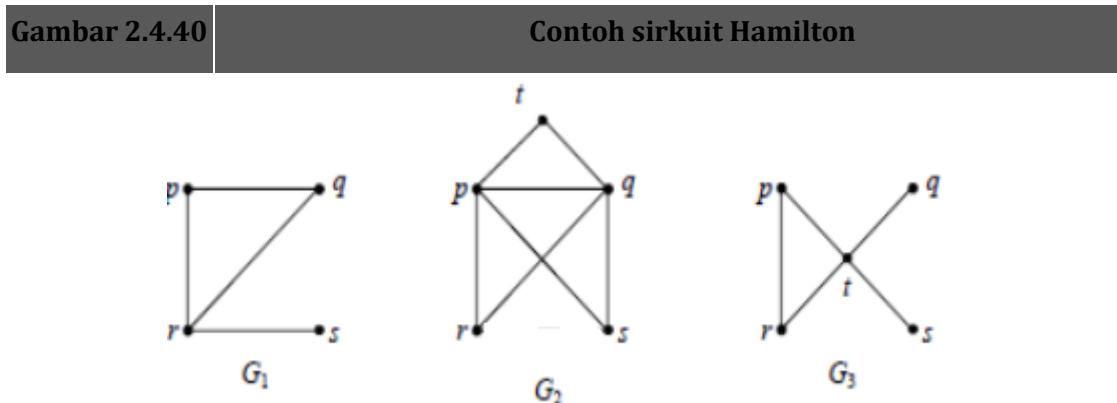


Pada ilustrasi diatas, sirkuit hamilton adalah lintasan yang dicetak tebal. Lintasan Hamilton suatu *graph* merupakan lintasan yang melalui setiap simpul dalam *graph* tersebut tepat satu kali. Jika lintasan tersebut kembali kesimpul awal, sehingga membentuk lintasan tertutup (sirkuit) maka lintasan ini dinamakan sirkuit Hamilton.

Dengan demikian, sirkuit Hamilton merupakan sirkuit yang melewati masing-masing sisi tepat satu kali. *Graph* yang memuat sirkuit Hamilton dinamakan *graph* Hamilton (Hamiltonian *graph*), sedangkan *graph* yang memuat lintasan Hamilton dinamakan *graph* semi Hamilton (semi- Hamiltonian *graph*).

Contoh :

Perhatikan tiga *graph* di bawah ini :



Graph G_1 merupakan *graph* semi Hamilton, lintasan hamiltonnya adalah:

$s - r - p - q - r$.

Sedangkan *graph* G_2 merupakan *graph* hamilton, sirkuit hamiltonnya adalah:

$t - p - r - q - p - s - q - t$.

Sementara itu pada *graph* G_3 tidak terdapat lintasan maupun sirkuit hamilton.

Misalkan G merupakan *graph* sederhana dengan jumlah simpulnya adalah n buah (dimana n paling sedikit tiga buah). Jika derajat setiap simpulnya paling sedikit $n/2$ simpul maka *graph* G tersebut merupakan *graph* Hamilton.

Beberapa hal tentang *graph* hamilton :

- Setiap *graph* lengkap merupakan *graph* Hamilton.
- Pada suatu *graph* lengkap G , dengan n buah simpul jika $n \geq 3$, maka



terdapat $\frac{(n-1)!}{2}$ buah sirkuit Hamilton.

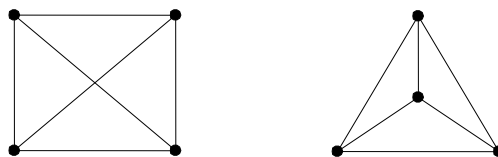
- Pada suatu *graph* lengkap G dengan n buah simpul jika $n \geq 3$ dan n ganjil, maka terdapat $\frac{(n-1)}{2}$ buah sirkuit Hamilton yang saling lepas (tidak ada sisi yang beririsan). Jika n genap dan $n \geq 4$, maka di dalam G terdapat $\frac{(n-2)}{2}$ buah sirkuit Hamilton yang saling lepas.

9. *Graph* Isomorfik dan Homeomorfik

Perhatikan dua *graph* berikut ini :

Gambar 2.4.41

Graph Isomorfik



Dua buah *graph* diatas, terdiri dari empat buah simpul dimana setiap simpul adalah berderajat tiga. Walaupun secara geometri kedua tersebut berbeda tetapi pada prinsipnya kedua *graph* tersebut adalah sama.

Definisi :

Dua buah *graph* G_1 dan G_2 dikatakan isomorfik jika terdapat korespondensi satu-satu antara simpul-simpul pada kedua *graph* tersebut dan antara sisi-sisi keduanya sehingga jika sisi e bersisian dengan simpul u dan v pada G_1 maka sisi e' pada G_2 juga bersisian dengan simpul u' dan v' .

Suatu *graph* dapat digambarkan dengan berbagai cara. Dua buah *graph* yang isomorfik adalah *graph* yang sama, kecuali penamaan simpul dan sisinya saja yang berbeda. Sebagai contoh dua *graph* diatas merupakan dua *graph* yang isomorfik.

Dua buah *graph* dikatakan isomorfik jika memenuhi ketiga syarat berikut (Deo, 1989):

1. Mempunyai jumlah simpul yang sama.
2. Mempunyai jumlah sisi yang sama



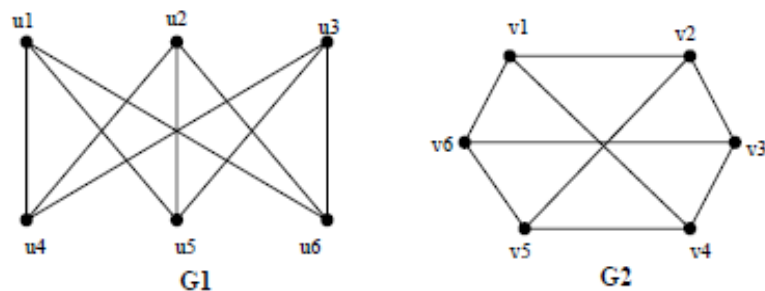
3. Mempunyai jumlah simpul yang sama berderajat tertentu.

Cara menunjukkan dua *graph* yang isomorfik dapat diperhatikan pada contoh berikut ini.

Contoh :

Diketahui 2 buah *graph* berarah :

Gambar 2.4.42 **Contoh Graph Isomorfik**



Periksa apakah kedua *graph* tersebut isomorfik? Jika ya, tentukan simpul-simpul yang saling berkorespondensi antara G1 dan G2.

Jawab :

Ya, kedua *graph* tersebut adalah isomorfik. Terlihat *graph* tersebut memuat simpul dimana setiap simpulnya masing-masing berderajat tiga.

Simpul yang saling berkorespondensi dari kedua *graph* tersebut adalah:

- ☐ simpul u1 dengan simpul v1
- ☐ simpul u2 dengan simpul v3
- ☐ simpul u3 dengan simpul v5
- ☐ simpul u4 dengan simpul v6
- ☐ simpul u5 dengan simpul v4
- ☐ simpul u6 dengan simpul v2

Pada dua *graph* yang isomorfik, kedua *graph* tersebut memiliki matriks ketetanggaan yang sama. Perhatikan matriks ketetanggaan dari kedua *graph* tersebut.

Dibawah ini adalah matriks ketetanggaan dari *graph* G1 :



$$M_{G_1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} u1 & u2 & u3 & u4 & u5 & u6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u1 \\ u2 \\ u3 \\ u4 \\ u5 \\ u6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Sementara itu, berikut ini adalah matriks ketetanggaan dari *graph* G2 :

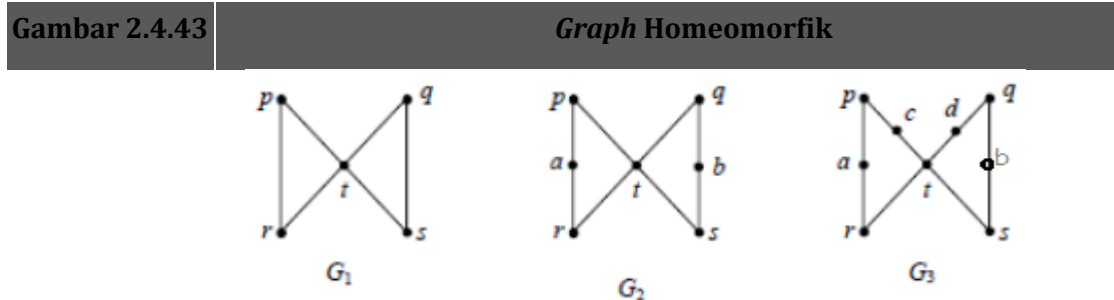
$$M_{G_2} = \begin{matrix} & \begin{matrix} v1 & v3 & v5 & v6 & v4 & v2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v1 \\ v3 \\ v5 \\ v6 \\ v4 \\ v2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Terlihat bahwa kedua *graph* tersebut memiliki matriks ketetanggaan yang sama, yaitu $M_{G_1} = M_{G_2}$.

Selanjutnya akan dijelaskan tentang definisi homeomorfik antara dua buah *graph*. Misalkan $G_2(V_2, E_2)$ diperoleh dari $G_1(V_1, E_1)$ dengan menambahkan simpul pada sebuah sisi atau lebih pada *graph* tersebut, maka *graph* $G_1(V_1, E_1)$ dan *graph* $G_2(V_2, E_2)$ dinamakan homeomorfik.

Contoh :

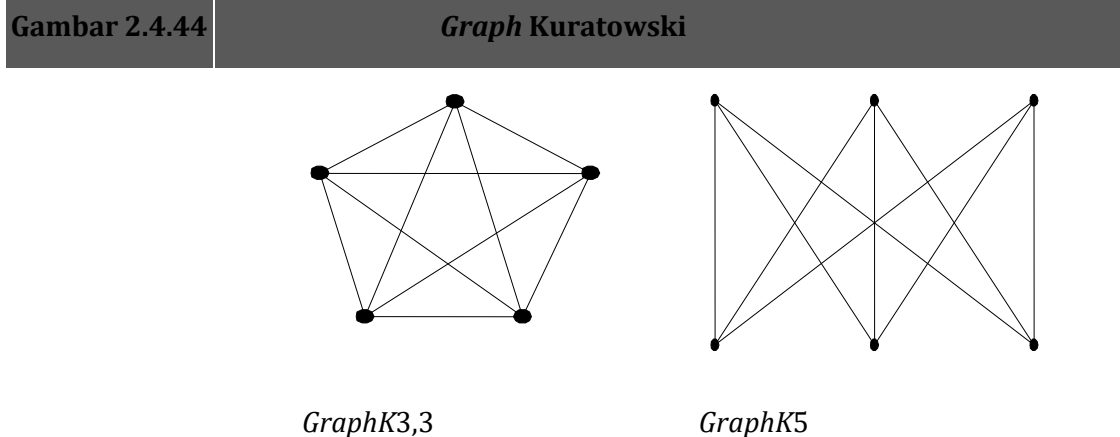
Perhatikan ketiga *graph* dibawah ini:





Ketiga *graph* diatas merupakan *graph* homeomorfik (*homeomorphic graphs*).

Berikutnya akan dijelaskan hubungan keplanaran suatu *graph* dengan *graph* Kuratowski. Perhatikan dua *graph* berikut:



Graph diatas keduanya merupakan *graph* tak planar. Kedua *graph* tersebut dinamakan *graph* kuratowski.

Sifat *graph* Kuratowski (Munir, 2003) adalah:

1. Kedua *graph* Kuratowski adalah *graph* teratur.
2. Kedua *graph* Kuratowski adalah *graph* tidak-planar
3. Penghapusan sisi atau simpul dari *graph* Kuratowski menyebabkannya menjadi *graph* planar.
4. *Graph* Kuratowski pertama adalah *graph* tidak-planar dengan jumlah simpul minimum, dan *graph* Kuratowski kedua adalah *graph* tidak-planar dengan jumlah sisi minimum.

Teorema Kuratowski :

Sebuah *graph* tak planar jika dan hanya jika ia memuat sebuah sub*graph* yang homeomorfik dengan K5 dan K3,3.

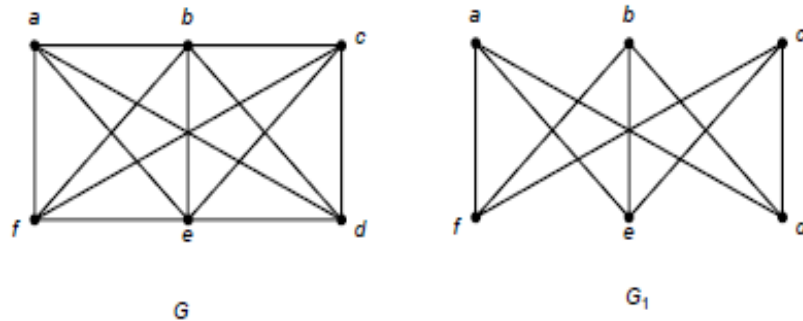
Contoh :

Perhatikan *graph* berikut ini :



Gambar 2.4.45

Contoh *Graph* Tak Planar



Dengan menggunakan teorema Kuratowski, jelas bahwa *graph* G bukan *graph* planar, karena memuat sub*graph* G_1 yang merupakan *graph* kuratowski ($K_{3,3}$).

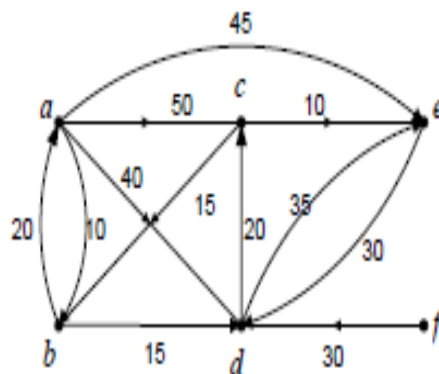
10. Beberapa Aplikasi *Graph*

a. Lintasan Terpendek (*Shortest Path*)

Misalkan G merupakan *graph* berbobot (*weighted graph*), yaitu setiap sisi dari *graph* G memiliki bobot tertentu, seperti pada ilustrasi dibawah ini :

Gambar 2.4.46

Lintasan terpendek



Hal yang biasanya dilakukan adalah menentukan lintasan terpendek pada *graph* tersebut. Dengan kata lain, menentukan lintasan yang memiliki total bobot minimum.

Contoh :



1. Menentukan jarak terpendek/waktu tempuh tersingkat/ongkos termurah antara dua buah kota
2. Menentukan waktu tersingkat pengiriman pesan (*message*) antara dua buah terminal pada jaringan komputer.

Beberapa jenis persoalan lintasan terpendek, antara lain:

- a. Lintasan terpendek antara dua buah simpul tertentu.
- b. Lintasan terpendek antara semua pasangan simpul.
- c. Lintasan terpendek dari simpul tertentu ke semua simpul yang lain.
- d. Lintasan terpendek antara dua buah simpul yang melalui beberapa simpul tertentu.

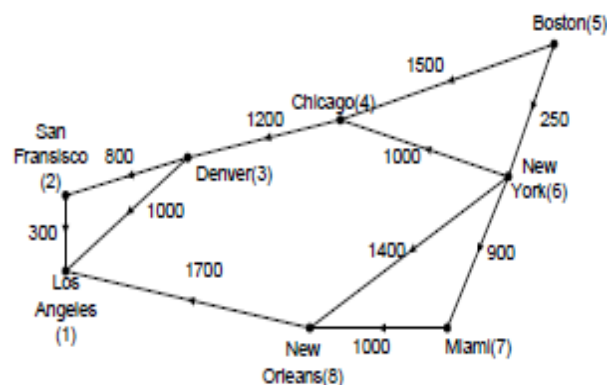
Algoritma Lintasan Terpendek *Dijkstra*

Algoritma *Dijkstra* merupakan suatu algoritma yang digunakan untuk menentukan lintasan terpendek dari suatu simpul ke semua simpul lain. Untuk mempermudah dalam pemahaman Algoritma Dijkstra, berikut ini adalah *graph* dimana simpul-simpulnya merepresentasikan kota-kota di Amerika Serikat dan sisi dari *graph* tersebut merepresentasikan jarak antar dua kota (dalam kilometer).

Contoh :

Gambar 2.4.47

Contoh Algoritma Dijkstra





Dengan menggunakan Algoritma Dijkstra akan ditentukan jarak terpendek dari kota Boston ke kota-kota yang lainnya.

Tabel 2.4.1

Jarak dari Kota Boston ke Kota-kota Lainnya

Lelaran	Simpul yang dipilih	Lintasan	S								D							
			1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8
Initial	-	-	0	0	0	0	0	0	0	0	∞	∞	∞	1500	0	250	∞	∞
1	5	5	0	0	0	0	1	0	0	0	∞	∞	∞	1500	∞	250	∞	∞
2	6	5, 6	0	0	0	0	1	1	0	0	∞	∞	∞	1250	∞	250	1150	1650
3	7	5, 6, 7	0	0	0	0	1	1	1	0	∞	∞	∞	1250	∞	250	1150	1650
4	4	5, 6, 4	0	0	0	1	1	1	1	0	∞	∞	2450	1250	∞	250	1150	1650
5	8	5, 6, 8	0	0	0	1	1	1	1	1	3350	∞	2450	1250	∞	250	1150	1650
6	3	5, 6, 4, 3	0	0	1	1	1	1	1	1	3350	∞	2450	1250	∞	250	1150	1650
7	2	5, 6, 4, 3, 2	0	1	1	1	1	1	1	1	3350	3250	2450	1250	∞	250	1150	1650

Jadi, lintasan terpendek dari:

5 ke 6 adalah 5, 6 dengan jarak = 250 km

5 ke 7 adalah 5, 6, 7 dengan jarak = 1150 km

5 ke 4 adalah 5, 6, 4 dengan jarak = 1250 km

5 ke 8 adalah 5, 6, 8 dengan jarak = 1650 km

5 ke 3 adalah 5, 6, 4, 3 dengan jarak = 2450 km

5 ke 2 adalah 5, 6, 4, 3, 2 dengan jarak = 3250 km

5 ke 1 adalah 5, 6, 8, 1 dengan jarak = 3350 km

b. Persoalan Perjalanan Pedagang

(Travelling Salesperson Problem - TSP)

Seperti halnya contoh pada (a), misalkan diberikan sejumlah kota dan jarak antar kota. Tentukan sirkuit terpendek yang harus dilalui oleh seorang pedagang bila pedagang itu berangkat dari sebuah kota asal dan ia harus menyinggahi setiap kota tepat satu kali dan kembali lagi ke kota asal keberangkatan. Ini merupakan masalah menentukan sirkuit Hamilton yang memiliki bobot minimum.



Contoh:

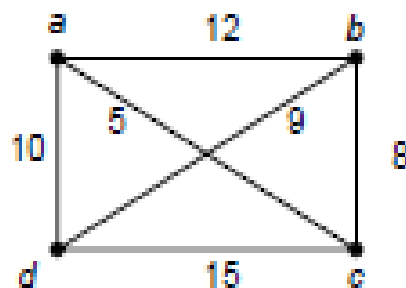
Pak Pos akan mengambil surat di bis surat yang tersebar pada n buah lokasi di berbagai sudut kota.

Contoh (Munir, 2003) :

Jumlah sirkuit Hamilton di dalam *graph* lengkap dengan n simpul: $(n - 1)!/2$.

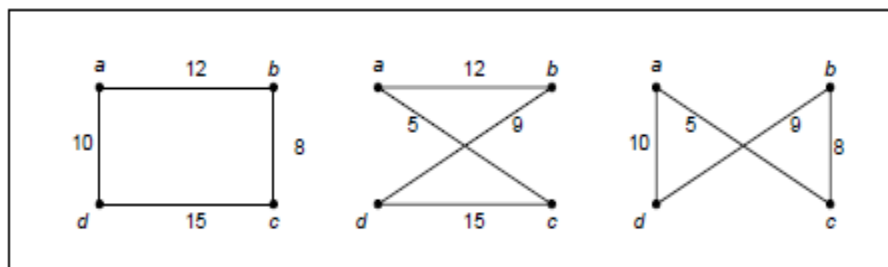
Gambar 2.4.48

Contoh Persoalan perjalanan pedagang



Graph di atas memiliki $(4 - 1)!/2 = 3$ sirkuit Hamilton, yaitu:

- $I_1 = (a, b, c, d, a)$ atau $(a, d, c, b, a) \implies \text{panjang} = 10 + 12 + 8 + 15 = 45$
- $I_2 = (a, c, d, b, a)$ atau $(a, b, d, c, a) \implies \text{panjang} = 12 + 5 + 9 + 15 = 41$
- $I_3 = (a, c, b, d, a)$ atau $(a, d, b, c, a) \implies \text{panjang} = 10 + 5 + 9 + 8 = 32$



Jadi, sirkuit Hamilton terpendek adalah $I_3 = (a, c, b, d, a)$ atau (a, d, b, c, a) dengan panjang sirkuit $= 10 + 5 + 9 + 8 = 32$.

c. Persoalan Tukang Pos Cina (*Chinese Postman Problem*)

Permasalahan ini, pertama kali dikemukakan oleh Mei Gan (berasal dari Cina) pada tahun 1962, yaitu : Seorang tukang pos akan mengantar surat ke alamat-



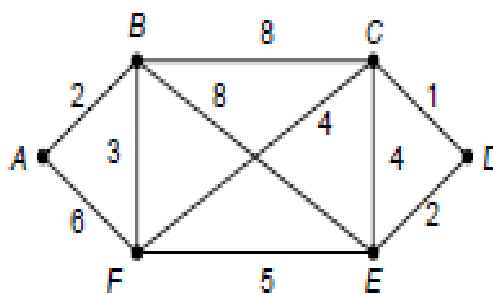
alamat sepanjang jalan di suatu daerah. Bagaimana ia merencanakan rute perjalanannya supaya ia melewati setiap jalan tepat sekali dan kembali lagi ke tempat awal keberangkatan.

Permasalahan tersebut merupakan masalah menentukan sirkuit Euler di dalam suatu *graph*.

Contoh (Munir, 2003):

Gambar 2.4.49

Contoh Persoalan tukang pos Cina



Lintasan yang dilalui tukang pos adalah A, B, C, D, E, F, C, E, B, F, A.

11. *Graph* sebagai Model Matematika dan Aplikasinya

a. *Graph* Sebagai Model Matematika

Konstruksi model matematika dapat dibuat dalam berbagai cara dengan permasalahan matematika yang berbeda-beda. Salah satu model matematika yang sudah cukup dikenal dan bisa mencakup berbagai permasalahan adalah teori *graph*. Pada bagian ini akan disajikan contoh permasalahan yang dapat dibuat model matematikanya dalam bentuk *graph*.

Contoh:

Seorang guru bermaksud membuat suatu diagram tentang hubungan antar siswa dari kelas yang diajarnya. Diagram tersebut harus berisikan informasi apakah antara satu siswa dengan siswa lainnya berteman atau tidak berteman. Hal semacam itu dapat dinyatakan dalam bentuk diagram yang disebut *graph*. Dalam *graph* tersebut, seorang siswa dinyatakan sebagai sebuah titik dan hubungan



berteman antara dua siswa, dinyatakan dengan sebuah sisi yang menghubungkan titik-titik yang mewakili dua siswa tersebut.

Contoh:

Dalam suatu persiapan untuk menghadapi perang, beberapa peleton tentara ditempatkan di beberapa lokasi yang berbeda. Komunikasi antara peleton dilakukan dengan menggunakan radio telepon yang kemampuannya terbatas pada jarak tertentu. Jika jarak antara dua peleton masih terjangkau, maka komunikasi dapat dilakukan. Keadaan seperti ini dapat dinyatakan dalam suatu model matematika berbentuk *graph*. Dalam *graph* tersebut, titik menyatakan peleton dan sisi antara dua titik menyatakan komunikasi antara dua peleton yang diwakili oleh dua titik tersebut.

Contoh:

Misalkan kita ingin menempuh perjalanan dari Jakarta menuju Surabaya. Mungkin kita ingin mengetahui rute terpendek yang dapat dipilih. Dalam permasalahan ini kota direpresentasikan sebagai titik, sedangkan rute atau jalan direpresentasikan sebagai segmen garis atau kurva.

Contoh:

Misalnya terdapat satuan tugas dalam kepolisian yang bertugas mengungkap jaringan pengedar obat terlarang. Hal tersebut dapat kita gambarkan ke dalam sebuah *graph*. Dalam *graph* tersebut, tiap-tiap anggota komisi dinyatakan dengan sebuah titik, dan hubungan di antara anggota dinyatakan dengan sisi atau kurva. Dalam permasalahan ini kita mungkin ingin tahu seberapa rapuhkah jaringan komunikasi ini, dan seberapa mudahkah kita bisa menghancurkan jaringan tersebut. Dengan menggunakan teori *graph* desain jaringan komunikasi yang handal dapat diciptakan.

Contoh:

Teori *graph* juga biasanya digunakan dalam bidang elektronika, misalnya untuk mendesain sirkuit cetakan. Biasanya sirkuit cetakan pada lembaran silikon harus



didesain secara khusus. Berbeda dengan desain sirkuit yang menggunakan kabel-kabel, sirkuit cetakan tidak boleh mengandung bagian-bagian konduktor yang saling bersinggungan atau saling memotong, karena hal tersebut bisa membuat munculnya hubungan pendek. Teori *graph* memberi penjelasan apakah suatu pola sirkuit cetakan yang kita miliki mempunyai pola lain yang sejenis? Apakah sebuah pola sirkuit yang memiliki hubungan konduktor yang saling berpotongan dapat didesain ulang demikian sehingga susunannya masih tetap tapi tidak lagi mengandung bagian-bagian yang saling bersinggungan atau berpotongan? Melalui konsep *graph* isomorfik kita dapat mengetahui apakah sebuah sirkuit cetakan memiliki desain lain yang lebih baik tanpa mengubah susunannya.

b. *Graph* Berarah Sebagai Model Matematika

Sebuah *graph* berarah D adalah suatu himpunan yang tidak kosong dengan sebuah relasi R pada V . R adalah relasi yang tidak refleksif. Seperti halnya dalam *graph* yang sudah dibicarakan di atas, elemen dari V disebut titik. Tiap pasangan terurut dalam R disebut sisi berarah atau arah. Karena relasi dari sebuah *graph* berarah D tidak perlu simetris, maka apabila (u, v) merupakan arah D , (v, u) belum tentu merupakan arah dari D . Hal semacam ini dapat kita ilustrasikan pada diagram dengan gambar segmen garis atau kurva antara titik u dan v yang memakai tanda panah sebagai tanda arah dari u ke v atau dari v ke u . Bila dari u ke v masing-masing mempunyai arah, maka diagramnya dapat kita buat seperti di bawah ini.

Gambar 2.4.50

Diagram *Graph* Berarah

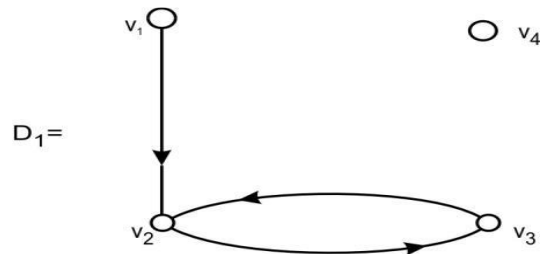


Misalkan D_1 adalah sebuah *graph* berarah dengan $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_2)\}$. *Graph* berarah D_1 , dapat dibuat seperti gambar di bawah ini (Gambar 2.4.51)



Gambar 2.4.51

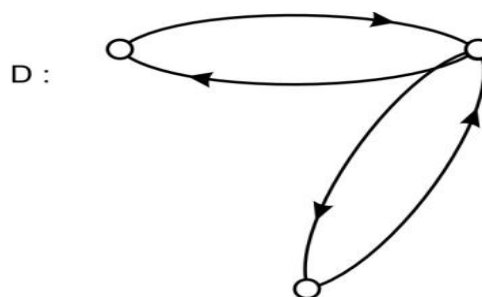
Graph berarah D1



Mungkin juga terjadi bahwa relasi yang mendefinisikan sebuah *graph* berarah D merupakan sebuah relasi simetris. *Graph* semacam ini disebut *Graph* berarah simetris. Gambar di bawah ini adalah contoh sebuah *graph* simetris.

Gambar 2.4.52

Graph berarah simetris



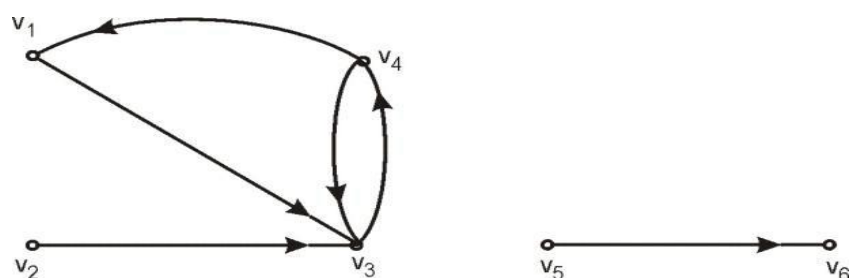
Contoh:

Diketahui sebuah *graph* berarah D dengan himpunan $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan himpunan arah $E = \{(v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_1), (v_4, v_3), (v_5, v_6)\}$. Gambarlah diagram dari *graph* D.

Penyelesaian Gambar di bawah ini merupakan diagram dari *graph* D.

Gambar 2.4.53

Diagram *graph* D



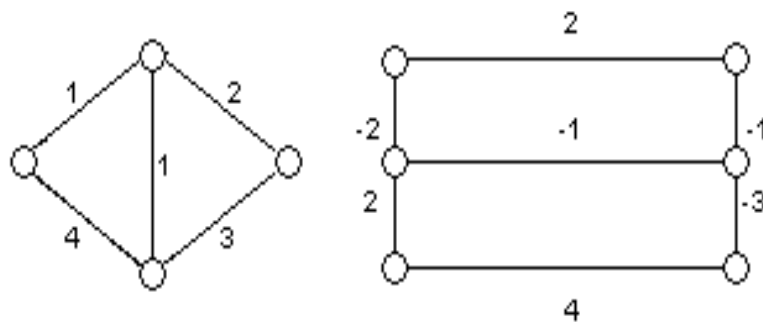


c. Jaringan Kerja Sebagai Model Matematika

Sebuah jaringan kerja adalah sebuah *graph* berarah dengan suatu fungsi yang memetakan himpunan sisi ke himpunan bilangan real. Jaringan kerja yang merupakan sebuah *graph* disebut jaringan kerja tidak berarah sedangkan jaringan kerja yang merupakan *graph* berarah disebut jaringan kerja berarah. Gambar di bawah ini merupakan contoh diagram dari dua jenis jaringan kerja tersebut.

Gambar 2.4.54

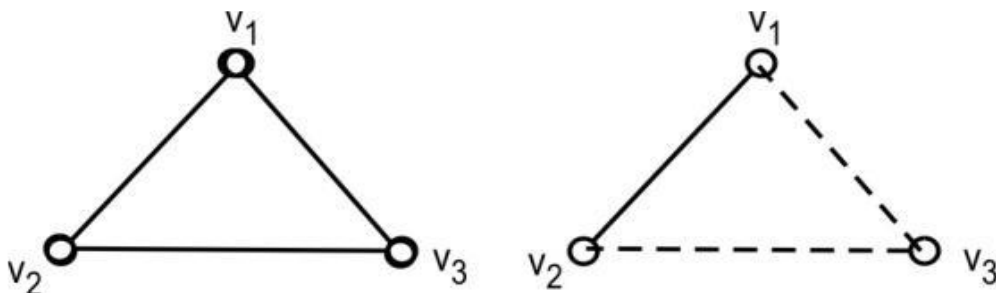
Diagram dari dua jenis jaringan kerja



Graph bertanda S adalah suatu jaringan kerja tidak berarah yang nilai fungsinya $+1$ atau -1 . Karena tanda positif atau negatif dipasangkan pada tiap sisi dari S , maka dapat dipahami bila tiap sisi dari S disebut sisi positif atau sisi negatif. Sebagai contoh, jika $V = \{v_1, v_2, v_3\}$, $E = \{v_1 v_2, v_1 v_3, v_2 v_3\}$ dan $F = \{(v_1 v_2, +1), (v_1 v_3, -1), (v_2 v_3, -1)\}$ maka *graph* bertanda seperti ini dapat dinyatakan dalam dua cara yaitu seperti diperlihatkan pada gambar di bawah ini.

Gambar 2.4.55

Graph bertanda



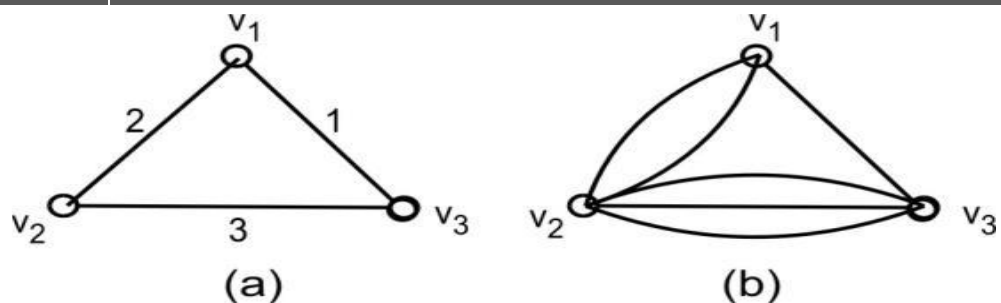


Contoh:

Hubungan bertetangga dapat dinyatakan dalam bentuk *graph* bertanda. Dua keluarga yang saling berhubungan dengan baik dapat diwakili oleh sisi positif, dua keluarga yang berhubungan kurang baik dapat dinyatakan dengan sisi negatif dan dua keluarga yang tidak saling berhubungan atau tidak saling kenal dapat dinyatakan dengan tidak ada sisi antar dua titik yang mewakili dua tetangga tersebut. Jaringan kerja tidak berarah yang nilai fungsinya bulat positif sering kali digunakan sebagai model matematika. Ada dua cara yang sering digunakan untuk menyatakan jaringan kerja tidak berarah seperti ini. Sebagai contoh, jika $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ $E = \{v_1 v_2, v_1 v_3, v_2 v_3\}$ dan $F = \{(v_1 v_2, 2), (v_1 v_3, 1), (v_2 v_3, 3)\}$ maka jaringan kerjanya dapat dibuat seperti terlihat pada gambar di bawah ini.

Gambar 2.4.56

Jaringan kerja V



Jaringan kerja tak berarah yang dinyatakan seperti Gambar 2.4.56 disebut *multigraph*. Misalnya M adalah sebuah *multigraph* dengan himpunan sisi E dan fungsi F . Jika $uv \in E$ dan $F(uv) = n$ (n adalah bilangan bulat positif), maka u dan v dihubungkan oleh n sisi. Sisi-sisi seperti ini disebut sisi multipel.

Contoh:

Misalkan v_1, v_2 , dan v_3 adalah tiga buah kota. Tiap dua kota dihubungkan oleh satu jalan yang jaraknya tidak sama. Jika antara salah satu kota dengan kota lain ditempuh dengan jalan kaki, maka lama perjalanannya adalah sebagai berikut: antara v_1 dan v_2 , dua hari; antara v_1 dan v_3 , satu hari; antara v_2 dan v_3 , tiga hari. Situasi seperti ini dapat dinyatakan dalam bentuk *graph* seperti pada Gambar 2.4.56(a)



Contoh:

Misalkan v_1 , v_2 , dan v_3 adalah tiga buah kota. Antara v_1 dan v_2 terdapat dua jalan, antara v_1 dan v_3 terdapat satu jalan, sedangkan antara v_2 dan v_3 terdapat tiga jalan. Situasi ini dapat dinyatakan dengan *graph* seperti Gambar 2.4.56(b)

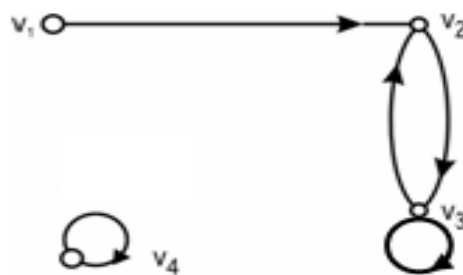
Bila relasi yang mendefinisikan suatu *graph* memuat (v, v) dengan $v \in V$, maka nama *graph* tersebut berubah menjadi *graph* dengan loop, *graph* berarah dengan loop, jaringan kerja dengan loop, atau *multigraph* dengan loop.

Misalkan $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, dan $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_2), (v_3, v_3), (v_4, v_4)\}$.

Karena relasi E memuat (v_3, v_3) dan (v_4, v_4) , maka *graph* berarah dengan loop ini dapat digambar seperti di bawah ini.

Gambar 2.4.57

Graph berarah dengan loop

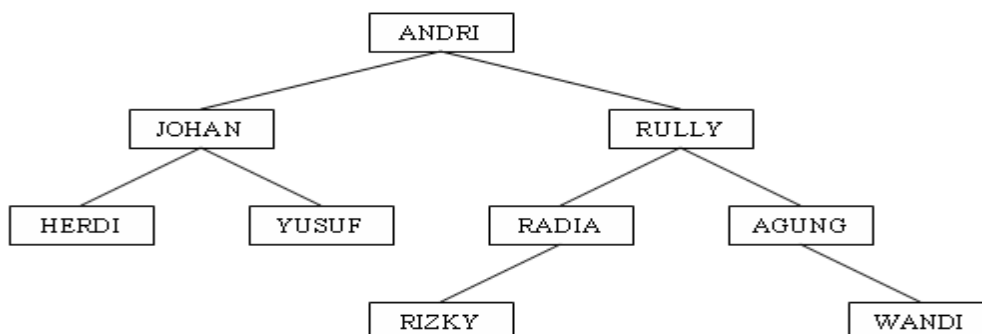


Silsilah Keluarga

Silsilah keluarga merupakan contoh masalah sederhana yang bisa dinyatakan dalam bentuk *graph*. *Graph* yang terbentuk dari silsilah keluarga biasanya berupa pohon atau *tree*. Gambar 2.4.58 di bawah ini adalah contoh silsilah keluarga Andri yang dapat diubah menjadi sebuah pohon.

Gambar 2.4.58

Silsilah keluarga



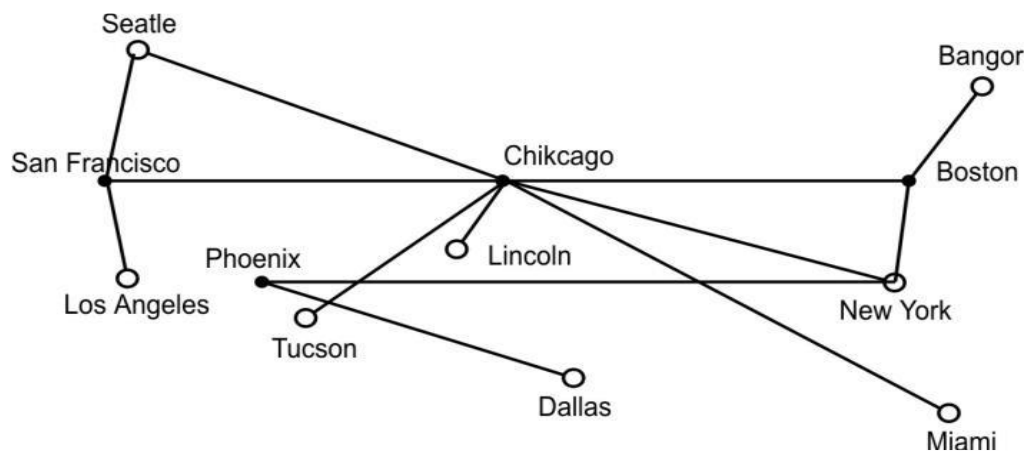


Sistem Komunikasi

Perhatikan Gambar 2.4.59 di bawah ini. Gambar tersebut merupakan suatu jaringan komunikasi dengan menggunakan komputer. Pada gambar tersebut, bulatan kecil menyatakan komputer mikro dan bulatan berwarna hitam kecil menyatakan komputer mini.

Gambar 2.4.59

Jaringan komunikasi



Komputer mini digunakan untuk mengubah signal dari suatu sirkuit ke sirkuit lainnya serta untuk memproses data. Sedangkan lambang diamond menyatakan komputer mainframe yang merupakan pusat dari seluruh jaringan. Seseorang yang bermaksud mengakses jaringan tersebut harus melalui salah satu dari komputer mini yang ada dengan menggunakan komputer mikro miliknya. Sistem tersebut dapat digunakan untuk mengirim pesan antar komputer mikro, atau untuk melakukan proses pengolahan data dengan menggunakan salah satu komputer yang lebih besar. Melalui diagram atau *graph* di atas dapat diajukan berbagai pertanyaan antara lain sebagai berikut:

1. Dapatkah komputer mikro di Seattle mengirimkan pesan melalui komputer mikro di Miami? Sertakan alasan!
2. Berapa banyak perubahan signal diperlukan untuk memperoleh pesan yang dikirim dari Boston ke Los Angeles?
3. Jika komputer mini di Chicago rusak, apakah pesan dari Boston ke Los Angeles masih dapat dikirimkan?



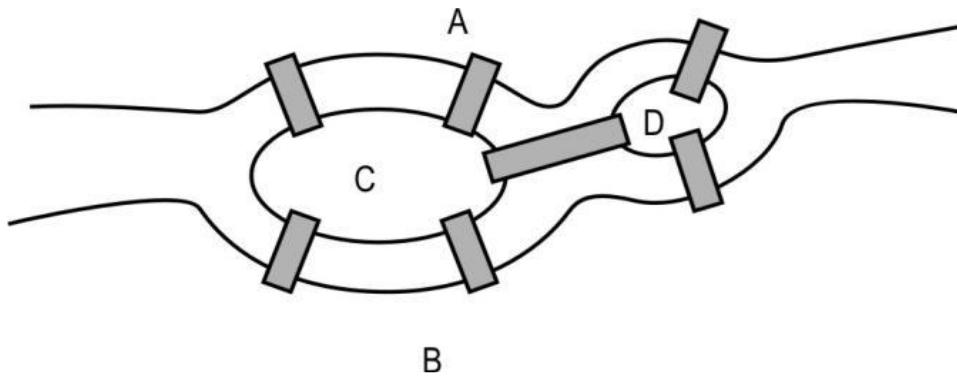
4. Jika sirkuit antara Boston dan New York ada kerusakan, apakah pengiriman pesan dari Bangor ke Phoenix masih bisa dilakukan?

Jaringan Transportasi

Masalah transportasi sebenarnya merupakan hal yang sangat klasik dalam teori *graph*, karena kelahiran teori *graph* itu diawali oleh masalah transportasi yang terkenal yaitu Jembatan Königsberg. Ilustrasi jembatan tersebut dapat dilihat pada Gambar 2.4.60 di bawah ini.

Gambar 2.4.60

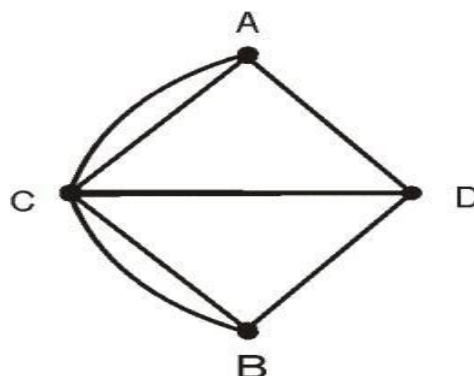
Jaringan transportasi



Pada gambar tersebut A, B, C, dan D adalah daerah-daerah yang dihubungkan oleh tujuh buah jembatan. Situasi seperti ini dapat dinyatakan dalam bentuk yang sederhana berupa *graph* seperti diperlihatkan pada Gambar 2.4.61 di bawah ini.

Gambar 2.4.61

Graph sederhana jembatan Königsberg



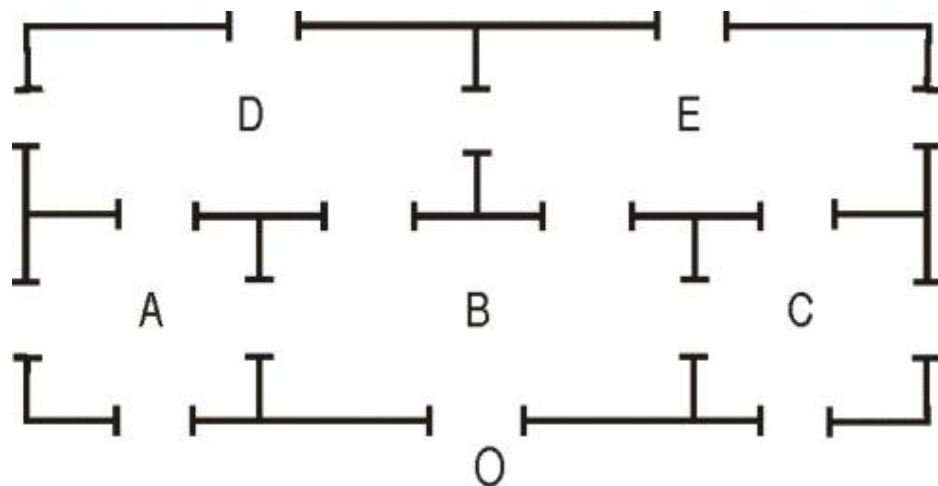


Desain Arsitektur

Perhatikan desain sebuah bangunan pada Gambar 2.4.62 di bawah ini. Pada gambar tersebut A, B, C, D, dan E menyatakan ruangan yang ada dalam bangunan tersebut, sedangkan O menyatakan bagian luar bangunan.

Gambar 2.4.62

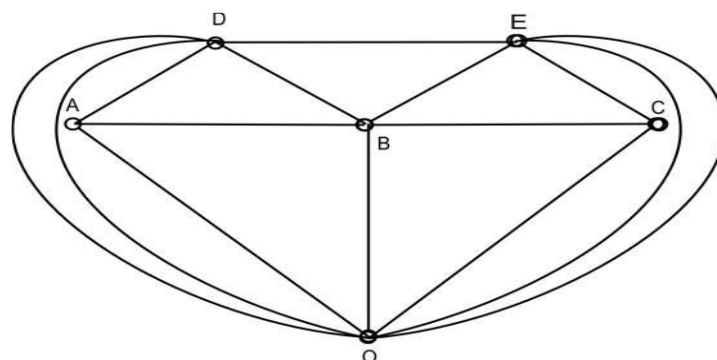
Desain sebuah bangunan



Jika A, B, C, D, E, dan O dinyatakan sebagai titik-titik dan pintu yang menghubungkan antar ruangan atau antara ruangan dengan bagian luar dinyatakan sebagai sisi, maka situasi pada gambar di atas dapat dinyatakan sebagai *graph* seperti pada Gambar 2.4.63 di bawah ini.

Gambar 2.4.63

Graph desain bangunan



Ikatan Kimia

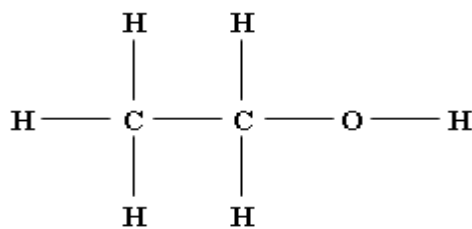
Dalam bidang kimia pun teori *graph* mempunyai kegunaan yang amat penting. Kita mengenal ikatan-ikatan kimia seperti H_2SO_4 , H_2O , CO_2 , dan CH_4 . Tiap



molekul kimia mengandung sejumlah atom yang dikaitkan dengan ikatan kimia. Sebagai contoh, karbon dioksida mempunyai sebuah atom karbon yang dikaitkan terhadap 2 atom oksigen. Demikian pula dalam C_2H_5OH (ethanol), sebuah atom karbon dikaitkan pada 3 atom hidrogen, sedangkan atom karbon lainnya dikaitkan dengan atom karbon pertama, 2 atom hidrogen dan sebuah atom oksigen. Atom oksigennya dikaitkan dengan sebuah atom hidrogen, selain dengan sebuah atom karbon. Perhatikan Gambar 2.4.64.

Gambar 2.4.64

Ikatan kimia ethanol



Konstruksi C_2H_5OH seperti pada gambar di atas termasuk ikatan kimia yang cukup rumit. Dalam teori *graph* ikatan kimia ini dapat dinyatakan dengan *graph* pada Gambar 2.4.65. Dalam *graph* tersebut banyaknya sisi yang menghubungkan sebuah titik menyatakan valensi dari tiap-tiap atom yang berkorespondensi.

Gambar 2.4.65

Graph ikatan kimia C_2H_5OH

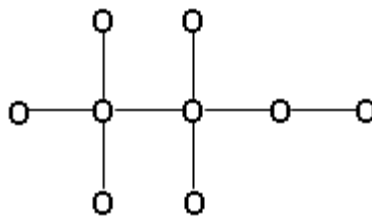


Diagram pada Gambar 1.23 pertama kali digunakan tahun 1864 untuk menggambarkan bagaimana susunan atom-atom dalam sebuah molekul. Ide pertama diketengahkan oleh *Alexander Crum Brown* (1838-1922), yang pertama kali memperkenalkan fenomena isomerisme, yakni eksistensi isomer-isomer. Isomer menyatakan molekul-molekul yang mempunyai rumus kimia yang sama tapi mempunyai sifat kimiawi yang berlainan. Diagram ini menunjukkan bagaimana sebuah atom dihubungkan dengan atom lainnya. Informasi ini sangat



diperlukan dalam mempelajari perilaku kimiawi sebuah molekul. Masalah dokumentasi kimia berhubungan dengan isomorfisme dan masalah pengkodean. Ini menunjukkan bahwa penyelesaian bagi masalah isomorfisme *graph* bagian memberikan penyelesaian bagi masalah penelitian struktur kimia.

D. Aktivitas Pembelajaran

1. Pengantar

Dalam kegiatan ini Anda akan melakukan serangkaian aktivitas atau kegiatan sejarah teori *graph*, definisi, terminologi dan jenis-jenis *graph*, memahami ketetanggaan-bersisian, lintasan Euler-Hamilton, isomorfik-homeomorfik dari suatu *graph* dan menyelesaikan persoalan sehari-hari yang berkaitan dengan teori *graph*

2. Aktivitas 0:

Pelajari dengan seksama materi pokok *graph* dalam modul ini kemudian diskusikan dengan rekan guru dan presentasikan.

Ada berapa aktivitas yang harus anda ikuti dalam mempelajari modul ini ? Jawablah pertanyaan di atas dengan menggunakan lembar kerja.

Aktivitas 1: Sejarah teori *graph*, definisi, terminologi dan jenis-jenis *graph*

Dalam aktivitas ini anda akan mempelajari tentang Sejarah teori *graph*, definisi, terminologi dan jenis-jenis *graph*. Jawablah pertanyaan di bawah ini dalam lembar kerja 4.1. Jika anda kesulitan menjawab disarankan untuk membaca materi tentang Sejarah teori *graph*, definisi, terminologi dan jenis-jenis *graph*. Hasilnya dipresentasikan di depan kelas dengan penuh percaya diri.

LK 4.1

1. Ceritakan tentang asal usul teori Jembatan Königsberg menurut pemahaman anda?
2. Bagaimana lahirnya Teori Graph? Ceritakan menggunakan Bahasa anda sendiri!.



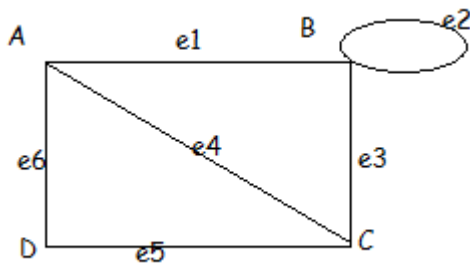
3. Apa yang kamu pahami tentang masalah empat warna? Ceritakan menggunakan Bahasa anda sendiri!.
4. Jelaskan tentang definisi Graph? Menurut pemhaman anda!
5. Tuliskan jenis-jenis graph yang anda ketahui!

Aktivitas 2: memahami ketetanggan dan kebersisian serta derajat dalam suatu graph

Dalam aktivitas ini anda akan mempelajari tentang ketetangga dan bersisian dan menuliskan matriksnya, serta menghitung derajat dari suatu graph

Jawablah pertanyaan di bawah ini dalam lembar kerja 4.2. Jika anda kesulitan menjawab disarankan untuk membaca materi tentang memahami keterhubungan. Hasilnya dipresentasikan di depan kelas dengan penuh percaya diri.

LK 4.2:



Jawablah pertanyaan berikut:

1. Tentukan simpul- simpul yang bertetangga dengan:
 - a. A
 - b. B
 - c. C
 - d. D
2. Tentukan sisi-sisi yang bersisian antara simpul :
 - a. A dan B
 - b. B dan C
 - c. A dan D
3. Buatlah bentuk matriks bersisian dari *graph* tersebut!.
4. Tentukan derajat dari semua simpul dari gaph di atas dan jumlahkan!



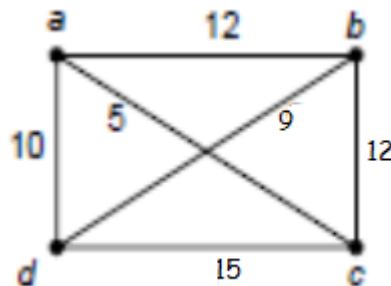
Aktivitas 3: Lintasan Euler-Hamilton dan isomorfik-homeomorfik dari suatu *graph*

Dalam aktivitas ini anda akan mempelajari tentang matriks ketetanggaan-bersisian lintasan Euler-Hamilton dan isomorfik-homeomorfik dari suatu *graph*. Jawablah pertanyaan di bawah ini dalam lembar kerja 4.3.1 dan LK 4.3.2. Jika anda kesulitan menjawab disarankan untuk membaca materi tentang lintasan Euler-Hamilton dan isomorfik-homeomorfik dari suatu *graph*. Hasilnya dipresentasikan di depan kelas dengan penuh percaya diri.

LK 4.31:

1. Bagaimana cara membuatlah *graph* semi Hamilton dan sirkuit Hamilton? Tentukan lintasannya!
2. Buatlah 2 *graph* yang isomorfik! Bagaimana cara menentukan simpul yang saling berkorespondensi? Sertakan penjelasan yang mendasari jawaban!

LK 4.3.2 :



1. Jelaskan cara menentukan banyak sirkuit Hamilton pada *graph* di atas! Tuliskan lintasannya?
2. Berapa panjang Sirkuit Hamilton terpendek *graph* di atas? Berikan penjelasan dari jawaban!

Aktivitas 5 : Instrumen penyusunan soal

Dalam kegiatan ini Anda akan berlatih untuk menyusun instrumen penilaian pada materi *graph* yang sedang dipelajari, dengan mengacu pada panduan penulisan soal dari PUSPENDIK, diskusikan dengan sesama peserta. Kerjakan dengan rasa tanggung jawab, cermat dan percaya diri.



E. Rangkuman

1. Teori *graph* lahir pada Tahun 1736 melalui tulisan Euler tentang masalah jembatan Königsberg.
2. Tahun 1647 G.R. Kirchoff pertama kali mengembangkan teori pohon.
3. A.F. Mobius diyakini sebagai orang pertama yang mengkaji masalah empat warna dalam pewarnaan sebuah peta.
4. Tahun 1859, Hamilton berhasil menciptakan sebuah permainan teori *graph* dengan menggunakan kayu berbentuk dodecahedron.
5. Buku pertama tentang teori *graph* ditulis Tahun 1936 oleh D. König.
6. Loop adalah sebuah sisi yang dua titik ujungnya sama
7. Dua buah sisi yang insiden dengan dua titik yang sama disebut sisi paralel.
8. *Graph* sederhana adalah sebuah *graph* yang tidak memuat loop dan sisi paralel.
9. Sebuah *graph* $G = (V, E)$ dengan V dan E berupa himpunan hingga disebut *graph* hingga, dan jika sebaliknya disebut *graph* tak hingga.
10. Dua sisi yang tidak paralel disebut ajasen, jika kedua sisi tersebut insiden dengan titik yang sama.
11. Dua buah titik disebut ajasen, jika kedua titik tersebut merupakan titik-titik ujung dari sisi yang sama.
12. Banyaknya titik berderajat ganjil dalam sebuah *graph* selalu genap.
13. Titik terisolasi adalah titik yang tidak memiliki sisi insiden.
14. Titik anting atau titik ujung adalah sebuah titik berderajat satu
15. Di antara beberapa model matematika yang sudah dikenal, *graph* merupakan salah satu contoh model matematika yang banyak kegunaannya.
16. Terdapat beberapa jenis *graph* yaitu *graph* tak berarah, *graph* berarah, dan jaringan kerja.
17. Sebuah *graph* G adalah suatu himpunan hingga V yang tidak kosong yang memenuhi sifat tidak refleksif dan simetris dari suatu relasi R pada V .
18. Sebuah *graph* berarah D adalah suatu himpunan V yang tidak kosong dengan sebuah relasi R pada V yang tidak refleksif.
19. Jaringan kerja adalah sebuah *graph* atau *graph* berarah dengan suatu fungsi yang memetakan himpunan sisi ke himpunan bilangan real.

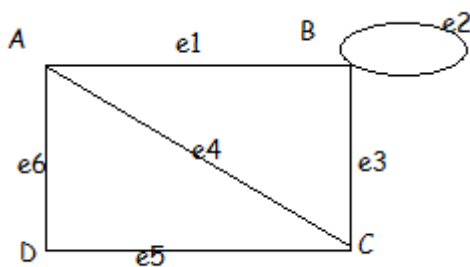


20. *Graph* dapat diterapkan dalam beberapa permasalahan antara lain masalah silsilah keluarga, sistem komunikasi, jaringan transportasi, dan desain arsitektur.



F.Tes Formatif

1. Teori *graph* lahir pada Tahun 1736 melalui tulisan Euler. Jelaskan masalah yang muncul dari lahirnya teori *graph* tersebut menurut pemahaman anda!
2. G.R. Kirchoff berhasil mengembangkan salah satu cabang/bagian teori *graph*. Jelaskan tentang cabang teori tersebut menurut pemahaman anda!
3. Apa yang kamu ketahui tentang pendapat para ahli teori *graph* masalah empat warna? Ceritakan menurut pemahamananda !
4. Perhatikan gambar berikut ini!



- a. Bagaimana cara menentukan sisi yang dua titik ujungnya sama? Sertakan penjelasan anda!
 - b. Apakah *graph* tersebut memiliki sisi sejajar? Berikan penjelasan yang mendasari jawaban anda!
 - c. Bagaimana cara menentuka sisi-sisi yang insiden dengan titik v3? Sertakan penjelasan yang mendasari jawaban anda!
2. Jelaskan menurut pemahamanmu tentang *graph* sederhana!
 3. Terdapat dua buah sisi yang tidak paralel insiden di sebuah titik yang sama. Apa yang dapat anda simpulkan tentang dua buah sisi tersebut!
 4. Kesimpulan apa yang kamu peroleh mengenai banyaknya titik berderajat ganjil dalam sebuah *graph*?
 5. Dalam sebuah *graph* $G = (V, E)$, himpunan mana yang dimungkinkan merupakan sebuah himpunan kosong? Berikan penjelasanmu!
 6. Suatu sekolah bermaksud membentuk sepuluh macam kepanitiaan yang anggota-anggotanya diambil dari 15 orang siswa terpilih. Banyaknya anggota dari kepanitiaan yang dibentuk tidak ditentukan, artinya, bisa beranggotakan sedikit atau bisa juga banyak. Kemudian setiap siswa dari 15 orang itu dimungkinkan



untuk tidak menjadi anggota kepanitiaan atau mungkin pula merangkap sebagai anggota beberapa kepanitiaan. Berikan dua contoh *graph* yang menggambarkan situasi tersebut!

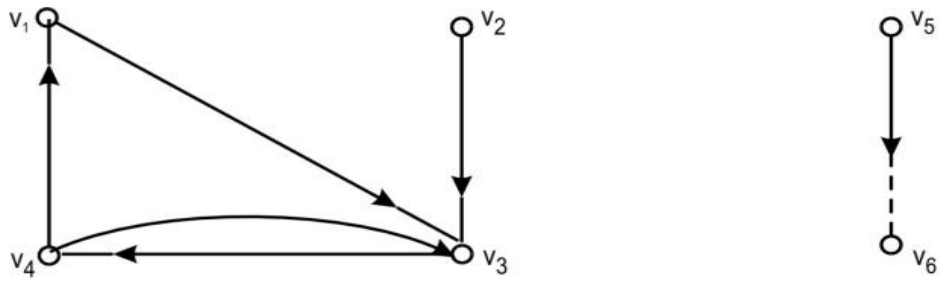
7. Gambarlah *graph* berarah dengan himpunan titik $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan himpunan sisi $E = \{(v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_1), (v_4, v_3), (v_5, v_6)\}$.
8. Kota A dan kota B dihubungkan oleh sebuah jalan umum biasa, sedangkan kota B dan kota C dihubungkan oleh dua jalan: satu jalan umum biasa dan satu lagi jalan bebas hambatan yang dikenakan biaya bagi siapa saja yang melaluinya. Buatlah dua *graph* yang menggambarkan situasi seperti ini!
9. Silsilah keluarga dapat dibuat atau dinyatakan dalam bentuk sederhana berupa *graph*. *Graph* tersebut biasanya berbentuk
10. Selain silsilah keluarga, jelaskan contoh masalah lain yang dapat dinyatakan dalam bentuk *graph*!

G.Kunci Jawaban

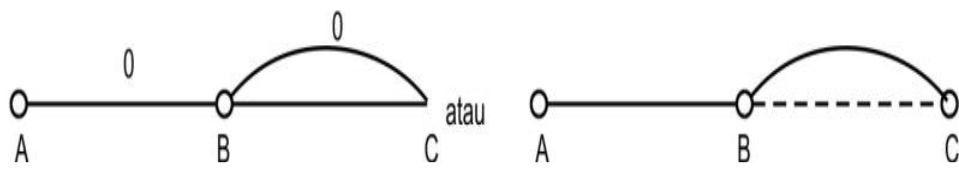
1. Jembatan Königsberg
2. Teori pohon
3. Möbius
4. Sisi e_1
5. Ya, yaitu e_4 dan e_5
6. *Graph* sederhana adalah *graph* yang tidak memuat loop dan sisi paralel
7. Sisi-sisi yang insiden dengan v_3 adalah e_4 , e_5 , dan e_6
8. Ajasen
9. Genap
10. Himpunan sisi E
11. Untuk *graph* G_1 , misalkan $V(G_1)$ menyatakan siswa terpilih yang jumlahnya 15 orang. Dua titik dari G_1 dihubungkan dengan sebuah sisi, jika dan hanya jika dua siswa yang diwakili oleh titik-titik tersebut menjadi anggota kepanitiaan yang sama. Untuk *graph* G_2 , misalkan $V(G_2)$ menyatakan 10 kepanitiaan yang dibentuk. Dua titik dari G_2 dihubungkan jika dan hanya jika dua kepanitiaan yang diwakili oleh titik-titik tersebut memuat anggota yang sama.



12.



13.



14. *Tree* atau pohon.

15. Sistem komunikasi, jaringan transportasi, dan desain arsitektur.



PENUTUP

Setelah menyelesaikan modul ini, Anda berhak untuk mengikuti tes untuk menguji kompetensi yang telah dipelajari. Apabila Anda dinyatakan memenuhi syarat kelulusan dari hasil evaluasi dalam modul ini, maka Anda berhak untuk melanjutkan ke topik/modul berikutnya.

Mintalah pada widyaiswara untuk uji kompetensi dengan sistem penilaian yang dilakukan langsung oleh pihak institusi atau asosiasi yang berkompeten apabila peserta telah menyelesaikan seluruh evaluasi dari setiap modul, maka hasil yang berupa nilai dari widyaiswara atau berupa portofolio dapat dijadikan bahan verifikasi oleh pihak institusi atau asosiasi profesi. Selanjutnya hasil tersebut dapat dijadikan sebagai penentu standar pemenuhan kompetensi dan bila memenuhi syarat peserta berhak mendapatkan sertifikat kompetensi yang dikeluarkan oleh institusi atau asosiasi profesi.



UJI KOMPETENSI

Pilihlah jawaban yang paling tepat diantara pilihan A, B, C, dan D

1. Nilai $\sum_{n=2}^{21} (5n - 6) =$

- a. 882
- b. 1030
- c. 1040
- d. 1957

2. Diketahui $\sum_{k=5}^{25} (2 - pk) = 0$, maka nilai $\sum_{k=5}^{25} pk =$

- a. 20
- b. 28
- c. 30
- d. 42

3. Bentuk $\sum_{k=0}^5 (4k + 3)$ sama dengan bentuk sigma dengan batas bawah 7 ...

- a. $\sum_{k=7}^{11} (4k - 25)$
- b. $\sum_{k=7}^{12} (4k - 25)$
- c. $\sum_{k=7}^{12} (4k + 3)$
- d. $\sum_{k=7}^{12} (4k - 10)$

4. Bentuk $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \dots + \frac{8}{15}$ jika dinyatakan dalam notasi sigma adalah ...

a. $\sum_{n=1}^7 \frac{2}{2n+1}$



b. $\sum_{n=1}^8 \frac{n}{2n-1}$

c. $\sum_{n=1}^8 \frac{2}{2n+1}$

d. $\sum_{n=2}^8 \frac{2}{2n+1}$

e. $\sum_{n=1}^7 \frac{n+1}{2n-1}$

5. Diketahui $\sum_{i=1}^{30} pi = 15$ nilai $\sum_{i=1}^{30} (3 - pi) = \dots$

- a. 15
- b. 30
- c. 45
- d. 60
- e. 75

6. Diketahui $S = N = \{\text{bilangan asli}\}$

$A = \{\text{bilangan ganjil}\}$

$B = \{\text{bilangan prima} > 2\}$

Maka ...

- a. $A = B$
- b. $A \cap B = \{\}$
- c. $A \cap B = \{2\}$
- d. $B \subseteq A$

7. Diketahui $K = \{k, o, m, p, a, s\}$ dan $L = \{m, a, s, u, k\}$. Maka $K \oplus L = \dots$

- a. $\{p, o, s, u, k, m, a\}$
- b. $\{m, a, s, b, u, k\}$
- c. $\{p, a, k, u, m, l, s\}$
- d. $\{u, p, o\}$



8. Diberikan $\{2, 4, 6, 7, 15\} \cap \{2, x, 6, 8\} = \{2, 4, 6\}$. Nilai x yang mungkin adalah ...
- 2
 - 4
 - 7
 - 8
9. Jika himpunan $A \subseteq B$ dengan $n(A) = 11$ dan $n(B) = 18$, maka $n(A \cap B) = \dots$
- 7
 - 11
 - 18
 - 28
10. Jika himpunan $B \subseteq A$ dengan $n(A) = 25$ dan $n(B) = 17$, maka $n(A \cup B) = \dots$
- 8
 - 11
 - 17
 - 25
11. Dualitas dari bentuk $(X \cap Y^c) \cup (X^c \cap Y)$ adalah...
- $(X^c \cup Y) \cap (X \cup Y^c)$
 - $(X \cap Y) \cup (X^c \cap Y^c)$
 - S
 - $(X \cup Y) \cap (X^c \cup Y)$
12. Bentuk sederhana dari $(A \cap B) \cup (A^c \cap B) \cup (A \cap B^c)$ adalah ..
- $A \cup B$
 - $A^c \cup B^c$
 - $A_c \cap B$
 - $A \cap B^c$



13. $(P \cup Q^c \cup R) \cap (P \cup Q^c \cup R^c) \cap (P \cup Q \cup R) = \dots$
- a. $P^c \cup (Q \cap R)$
 - b. $P \cup (Q^c \cap R)$
 - c. $P^c \cup (Q \cap R^c)$
 - d. $P \cup (Q \cap R^c)$
14. Dalam seleksi penerima beasiswa, setiap siswa harus lulus tes matematika dan bahasa. Dari 180 peserta terdapat 103 orang dinyatakan lulus tes matematika dan 142 orang lulus tes bahasa. Banyak siswa yang dinyatakan lulus sebagai penerima beasiswa ada ... orang.
- a. 38
 - b. 45
 - c. 65
 - d. 77
15. Sebuah agen penjualan majalah dan koran ingin memiliki pelanggan sebanyak 75 orang. Banyak pelanggan yang ada saat ini sebagai berikut: 20 orang berlangganan majalah, 35 orang berlangganan koran, dan 5 orang berlangganan keduanya. Agar keinginannya tercapai, banyak pelanggan yang harus ditambahkan sebanyak ...
- a. 10 org
 - b. 15 org
 - c. 25 org
 - d. 70 org
16. Jembatan Königsberg di daratan Eropa telah menjadi inspirasi kelahiran teori *graph*. Orang yang pertama kali membahas masalah jembatan tersebut dengan menggunakan teori *graph* adalah

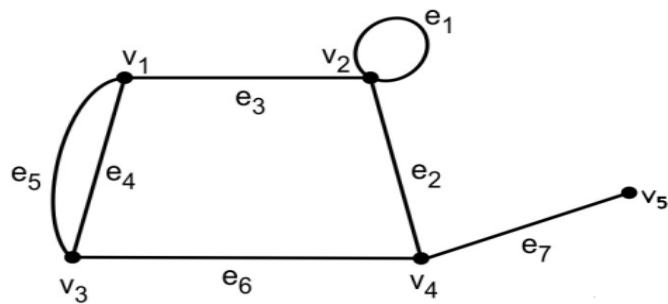


- a. Hamilton
 - b. Konigsberg
 - c. Euler
 - d. Konig
17. Teori pohon merupakan bagian teori *graph* yang sangat penting. Orang yang pertama kali mengemukakan teori ini adalah
- a. Kirchoff
 - b. Konig
 - c. Hamilton
 - d. Euler
18. Dua buah sisi yang insiden pada dua titik yang sama disebut sisi
- a. seri
 - b. sejajar
 - c. insiden
 - d. Ajasen
19. Sebuah *graph* yang tidak memuat loop dan sisi paralel disebut *graph*
- a. Nol
 - b. tree
 - c. sederhana
 - d. terhubung
20. *Graph* $G = (V, E)$ disebut *graph* hingga jika
- a. V dan E merupakan himpunan hingga.
 - b. V merupakan himpunan hingga.
 - c. E merupakan himpunan hingga.
 - d. V atau E merupakan himpunan hingga.
21. *Graph* $G = (V, E)$ disebut *graph* tak hingga jika
- a. V dan E merupakan himpunan hingga



- b. V atau E merupakan himpunan tak hingga
- c. V dan E merupakan himpunan tak hingga
- d. V merupakan himpunan kosong

22. Perhatikan *graph* berikut.



Derajat titik v_2 dari *graph* di atas adalah

- e. 1
 - f. 2
 - g. 3
 - h. 4
23. Misalkan e_1 dan e_2 adalah dua sisi dari suatu *graph* G yang tidak paralel dan v_1 dalam G . Jika e_1 dan e_2 insiden di v_1 , maka kedua sisi itu disebut
- a. Ajasen
 - b. Insiden
 - c. Sejajar
 - d. Seri
24. Misalkan dua titik v_1 dan v_2 dalam sebuah *graph* G merupakan titik-titik ujung dari sebuah sisi e . Maka kedua titik tersebut merupakan titik-titik yang saling
- a. seri
 - b. paralel
 - c. ajasen
 - d. insiden



25. Sebuah titik dalam *graph* G yang tidak memiliki satu pun sisi insiden disebut
- titik pendan
 - titik terisolasi
 - titik insidensi
 - titik ajasensi
26. Berikut adalah contoh permasalahan yang bisa dinyatakan dalam bentuk *graph*, kecuali
- masalah hubungan keluarga
 - masalah hubungan bertetangga
 - masalah hubungan pertemanan
 - masalah pengobatan penyakit menular
27. Sebuah *graph* berarah G adalah suatu himpunan hingga titik yang tidak kosong dan sebuah relasi R yang bersifat
- refleksif
 - tidak refleksif
 - antisimetri
 - transitif
28. Karena relasi dari sebuah *graph* berarah D tidak perlu simetris, maka apabila (u, v) merupakan arah dari D , (v, u) adalah
- pasti merupakan arah dari D
 - berlawanan arah dengan (u, v)
 - searah dengan (u, v)
 - tidak perlu merupakan arah dari D
29. Jika sebuah *graph* D , (u, v) dan (v, u) keduanya merupakan arah dari D , maka *graph* tersebut disebut *graph*
- berarah
 - berarah simetris



- c. tidak berarah
- d. tidak berarah simetris

30. Jaringan kerja yang merupakan *graph* berarah disebut

- a. jaringan kerja biasa
- b. jaringan tidak berarah
- c. jaringan kerja berarah
- d. jaringan kerja semu

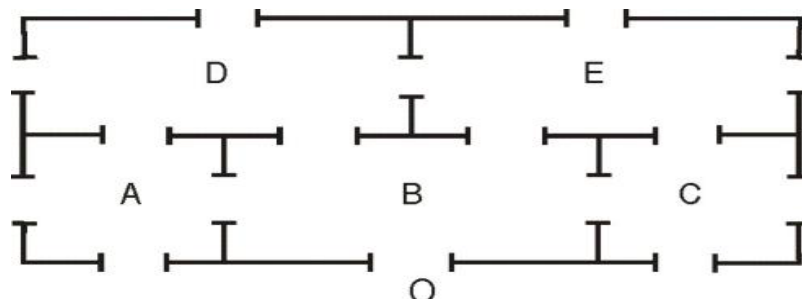
31. Misalkan M adalah sebuah *multigraph*. Jika $uv \in E$ dan $F(uv) = n$, maka u dan v dihubungkan oleh sisi sebanyak

- a. n
- b. $n-1$
- c. $n+1$
- d. $n(n-1)$

32. Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah *multigraph*. Jika G memuat (v, v) dengan v anggota V , maka G disebut

- a. loop
- b. *multigraph* dengan loop
- c. *multigraph*
- d. *graph* berarah

33. Perhatikan Gambar 2.4.62.



Banyaknya pintu yang terdapat dalam suatu ruangan sama dengan ... dari *graph* yang merepresentasikannya.



- a. banyak sisi
- b. banyaknya sisi berarah
- c. derajat titik
- d. banyaknya loop

34. Masalah transportasi yang terkenal yaitu Jembatan Königsberg. Masalah tersebut dapat digambar dalam bentuk *graph* yang terdiri dari:

- a. 4 titik dan 7 sisi
- b. 4 sisi dan 7 titik
- c. 4 titik dan 4 sisi
- d. 7 titik dan 7 sisi

35. Orang pertama yang memperkenalkan fenomena isomertris untuk menggambarkan bagaimana susunan atom-atom dalam sebuah molekul adalah

- a. Leonhard Euler
- b. Alexander Crum Brown
- c. Königsberg
- d. Hamilton



DAFTAR PUSTAKA

Buku, diktat, modul:

Iryanti, Puji. (2008). *Pembelajaran Barisan, Deret Bilangan dan Notasi Sigma di SMA*. Yogyakarta: PPPPTK Matematika Depdiknas

Suryadi, Didi, Priatna, Nanang. (2008). *Pengetahuan Dasar Teori Graph (Modul 1)*. Bandung: tidak diterbitkan.

Deo, N. (1989). *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*. New Delhi: Prentice-Hall.

Suryadi, D. (1996). *Matematika Diskrit*. Jakarta: Universitas Terbuka.

Sutarno, H., Priatna, N., & Nurjanah (2005). *Matematika Diskrit*. Malang: UM Press.

Chartrand, G. (1985). *Introductory Graph Theory*. New York: Dover Publications.

Wibisono, Samuel. (2008). *Matematika Diskrit Edisi 2*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Internet:

Yudistira, Angga. (2013). *Kumpulan Soal dan Pembahasan Himpunan*. [Online]. Tersedia: <http://installflame.blogspot.co.id/2013/05/kumpulan-soal-dan-pembahasan-himpunan.html>. [26 Nopember 2015].



GLOSARIUM

ISTILAH	KETERANGAN
Notasi Sigma	Merupakan notasi yang digunakan untuk menyatakan penjumlahan <u>bilangan</u> , dilambangkan dengan Σ .
<i>Crisp</i>	Jelas, tegas. Menyatakan kejelasan atau ketegasan dari objek-objek himpunan
Irisan (<i>intersection</i>)	Operasi himpunan A dan B dimana $x \in A$ dan $x \in B$, dinotasikan dengan $A \cap B$
Gabungan (<i>union</i>)	Operasi himpunan A atau B dimana $x \in A$ atau $x \in B$, dinotasikan dengan $A \cup B$
Komplemen (<i>complement</i>)	Operasi himpunan universal yang bukan A dimana $x \in U$ dan $x \notin A$, dinotasikan dengan \overline{A} atau A^c .
Selisih (<i>diference</i>)	Operasi himpunan A bukan B dimana $x \in A$ dan $x \notin B$, dinotasikan dengan $A - B$ atau $A \cap \overline{B}$
Beda simetri (<i>symmetric difference</i>)	Operasi himpunan A atau B, dinotasikan dengan $A \oplus B$, yaitu $(A-B) \cup (B-A)$
Aljabar himpunan	Penerapan sifat-sifat atau prinsip operasi himpunan dalam menyederhanakan atau menguraikan kalimat himpunan
Prinsip dualitas (<i>duality principle</i>)	Dua konsep yang berbeda dapat dipertukarkan namun tetap memberikan jawaban yang benar
Prinsip inklusi-eksklusi	<p>Prinsip penjumlahan dua himpunan A dan B, dimana:</p> $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ <p>atau secara umum:</p> $ A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r = \sum_i A_i - \sum_{1 \leq i < j \leq r} A_i \cap A_j + \sum_{1 \leq i < j < k \leq r} A_i \cap A_j \cap A_k + \dots + (-1)^{r-1} A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_r $



Ajasensi	Kedudukan dua titik (misal P dan Q) yang dihubungkan dengan sebuah sisi e.
Derajat	Banyaknya sisi yang insiden dengan suatu titik.
Graph	Sekumpulan objek ($V = \{v_1, v_2, \dots\}$ yang disebut himpunan titik), dan sebuah himpunan lain ($E = \{e_1, e_2, \dots\}$ yang merupakan himpunan sisi) sedemikian hingga tiap sisi ek dikaitkan dengan suatu pasangan titik tak terurut (v_i, v_j) .
Graph Berarah	Suatu <i>graph</i> yang sisi-sisinya mempunyai arah.
Graph Berarah Simetris	Suatu <i>graph</i> berarah yang merupakan sebuah relasi simetris.
Graph Bertanda S	Suatu jaringan kerja tidak berarah yang nilai fungsinya +1 atau -1.
Graph Hingga	Sebuah <i>graph</i> $G(V, E)$ dengan V dan E hingga.
Graph Nol	Sebuah <i>graph</i> $G = (V, E)$ dengan $E = 0$.
Graph Sederhana	Sebuah <i>graph</i> yang tidak memiliki loop dan sisi paralel.
Graph Tak Hingga	Sebuah <i>graph</i> $G(V, E)$ dengan V dan E tak hingga
Insidensi	Kedudukan dua titik (misal P dan Q) yang terletak pada sisi e atau titik P dan Q merupakan titik ujung sisi e
Jaringan Kerja	Sebuah <i>graph</i> berarah dengan suatu fungsi yang memetakan himpunan sisi ke himpunan bilangan real.



Jaringan Kerja Berarah	Jaringan kerja yang merupakan <i>graph</i> berarah.
Jaringan Kerja Tidak Berarah	Jaringan kerja yang merupakan sebuah <i>graph</i> .
Loop	Sisi yang dua titik ujungnya sama
Seri	Dua sisi yang saling berjasensi atau berbatasan jika titik sekutunya berderajat satu
Sisi Paralel	Dua titik yang berlainan dihubungkan oleh dua sisi atau lebih.
Titik Anting/Ujung	Sebuah titik yang berderajat satu.
Titik Terisolasi	Sebuah titik yang tidak memiliki sisi insiden atau titik yang berderajat nol.
Valensi	Derajat suatu titik.



LAMPIRAN

Kegiatan Belajar 1

Lembar Kerja 1.1: Analisis dan *review* indikator pencapaian kompetensi

Materi pokok: Notasi Sigma

Kelompok:

Anggota kelompok :

No	Materi Pokok / Sub materi Pokok	Kesesuaian dgn IPK		Keterangan
		Sesuai	Kurang/Tidak Sesuai	

Catatan:

.....
.....



.....

Lembar Kerja 1.2: Analisis dan *review* kecukupan materi ajar

Materi pokok: Notasi Sigma

Kelompok:

Anggota kelompok :

No	Materi Pokok / Sub materi Pokok	Kesesuaian dan kecukupan		Keterangan
		Ya	Tidak	

Catatan:

.....



.....

Lembar Kerja 2: Rancangan/penyusunan pertanyaan dan permasalahan mendasar

Materi pokok: Notasi Sigma

Kelompok:

Anggota kelompok :

No	Sub materi Pokok	Pertanyaan dan permasalahan		Keterangan
		Aspek materi	Aspek metodologi	

Catatan:

.....



.....

Lembar Kerja 3: Eksplorasi dan pengembangan

Materi pokok: Notasi Sigma

Kelompok:

Anggota kelompok :

No	Sub materi Pokok	Eksplorasi dan pengembangan	Keterangan

Catatan:

.....



Lembar Kerja 4: Aplikasi dan penerapan

Materi pokok: Notasi Sigma

Kelompok:

Anggota kelompok :

No	Sub materi Pokok	Aplikasi dan penerapan	Keterangan
		Teknik Bangunan: a. Teori/konsep dasar b. Soal/permasalahan dan penyelesaian	
		Teknik Mesin: a. Teori/konsep dasar b. Soal/permasalahan dan penyelesaian	
		Teknik Elektronika: a. Teori/konsep dasar b. Soal/permasalahan dan penyelesaian	
		Dst ...	

Catatan:



Kegiatan Belajar 2

Lembar Kerja 1.1: Analisis dan *review* indikator pencapaian kompetensi

Materi pokok: Himpunan

Kelompok:

Anggota kelompok :

No	Materi Pokok / Sub materi Pokok	Kesesuaian dgn IPK		Keterangan
		Sesuai	Kurang/Tidak Sesuai	

Catatan:

.....

.....



.....

Lembar Kerja 1.2: Analisis dan *review* kecukupan materi ajar

Materi pokok: Himpunan

Kelompok:

Anggota kelompok :

No	Materi Pokok / Sub materi Pokok	Kesesuaian dan kecukupan		Keterangan
		Ya	Tidak	

Catatan:

.....



.....

Lembar Kerja 2: Rancangan/penyusunan pertanyaan dan permasalahan mendasar

Materi pokok: Himpunan

Kelompok:

Anggota kelompok :

No	Sub materi Pokok	Pertanyaan dan permasalahan		Keterangan
		Aspek materi	Aspek metodologi	

Catatan:

.....



Lembar Kerja 3: Eksplorasi dan pengembangan

Materi pokok: Himpunan

Kelompok:

Anggota kelompok :

No	Sub materi Pokok	Eksplorasi dan pengembangan	Keterangan

Catatan:



Lembar Kerja 4: Aplikasi dan penerapan

Materi pokok: Himpunan

Kelompok:

Anggota kelompok :

No	Sub materi Pokok	Aplikasi dan penerapan	Keterangan
		Teknik Bangunan: c. Teori/konsep dasar d. Soal/permasalahan dan penyelesaian	
		Teknik Mesin: c. Teori/konsep dasar d. Soal/permasalahan dan penyelesaian	
		Teknik Elektronika: c. Teori/konsep dasar d. Soal/permasalahan dan penyelesaian	
		Dst ...	

Catatan:



Kegiatan Belajar 3

Lembar Kerja 1.1: Analisis dan *review* indikator pencapaian kompetensi

Materi pokok: Teori *Graph*

Kelompok:

Anggota kelompok :

No	Materi Pokok / Sub materi Pokok	Kesesuaian dgn IPK		Keterangan
		Sesuai	Kurang/Tidak Sesuai	

Catatan:

.....
.....
.....



Lembar Kerja 1.2: Analisis dan *review* kecukupan materi ajar

Materi pokok: Teori *Graph*

Kelompok:

Anggota kelompok :

No	Materi Pokok / Sub materi Pokok	Kesesuaian dan kecukupan		Keterangan
		Ya	Tidak	

Catatan:

.....
.....



Lembar Kerja 2: Rancangan/penyusunan pertanyaan dan permasalahan mendasar

Materi pokok: Teori *Graph*

Kelompok:

Anggota kelompok :

No	Sub materi Pokok	Pertanyaan dan permasalahan		Keterangan
		Aspek materi	Aspek metodologi	

Catatan:

.....
.....



Lembar Kerja 3: Eksplorasi dan pengembangan

Materi pokok: Teori *Graph*

Kelompok:

Anggota kelompok :

No	Sub materi Pokok	Eksplorasi dan pengembangan	Keterangan

Catatan:

.....
.....



Lembar Kerja 4: Aplikasi dan penerapan

Materi pokok: Teori *Graph*

Kelompok:

Anggota kelompok :

No	Sub materi Pokok	Aplikasi dan penerapan	Keterangan
		Teknik Bangunan: a. Teori/konsep dasar b. Soal/permasalahan dan penyelesaian	
		Teknik Mesin: a. Teori/konsep dasar b. Soal/permasalahan dan penyelesaian	
		Teknik Elektronika: a. Teori/konsep dasar b. Soal/permasalahan dan penyelesaian	
		Dst ...	

Catatan:

.....
.....



Lembar Kerja 5: LaporanPresentasi KB 2

Materi pokok: Notasi Sigma

Kelompok:

Anggota kelompok :

MODUL

PENGEMBANGAN KEPROFESIAN BERKELANJUTAN

MATEMATIKA TEKNIK

SEKOLAH MENENGAH KEJURUAN (SMK)

EDISI REVISI 2018



Terintegrasi Penguatan Pendidikan Karakter dan
Pengembangan Soal Keterampilan Berpikir Aras Tinggi
(HOTS)



Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan
Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan
2018

Jalan Jenderal Sudirman, Gedung D Lantai 12, Senayan, Jakarta 10270 Telefon / Fax: (021)57974108

<http://gtk.kemdikbud.go.id/>